OBSAH:

Kapitola 1
Úvod

Táto prednáška nadväzuje na prednášku o euklidovských priestoroch a zaoberá sa špeciálnymi typmi zobrazení medzi takýmito priestormi. Podáva vybrané vlastnosti a klasifikáciu niektorých typov zobrazení. Úspešné zvládnutie nasledujúceho textu predpokladá základné znalosti z lineárnej algebry a geometrie euklidovského priestoru ako sú:

i) lineárne zobrazenia vektorových priestorov
ii) základná veta o lineárnych zobrazeniach
iii) matica lineárneho zobrazenia
iv) skladanie lineárnych zobrazení, súčin matíc
v) regulárna lineárna transformácia, inverzná lineárna transformácia
vi) determinant matice
vii) skalárny súčin
viii) (karteziánska) súradnicová sústava v E_n
ix) lineárne variéty v E_n
x) parametrické a všeobecné rovnice lineárnej variéty
xi) vzájomné polohy lineárnych variét
xii) kolmosť, vzdialenosť, súčin lineárnych variét

Všetky nasledujúce objekty označené veľkými písmenami A,B,$C\dots$ budú prvky reálneho euklidovského priestoru $E_n = (\mathcal{A}, V_n, +)$ s ľubovoľnou pevne zvolenou dimenziou n. Malým tučným rezom označujeme vektory z príslušného asociovaného vektorového priestoru V_n (napr. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$).

Precvičte si svoje znalosti. V prípade problémov si príslušné partie zopakujte.

Kapitola 2
Základné pojmy

Definícia 1 (Lineárna kombinácia bodov): Nech $P_0, \dots, P_m \in E_n$ sú body a nech $\alpha_0, \dots, \alpha_m \in R$, pričom $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$ $\left(\sum_{i=0}^m \alpha_i = 0\right)$. Lineárnou kombináciou bodov $P_0, \dots, P_m$ s koeficientami $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ nazývame výraz

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i P_i := P + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (P_i - P) \left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i P_i := \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (P_i - P) \right),$$

kde $P \in E_n$ je ľubovoľný bod. Výraz predstavuje bod z E_n(vektor z asociovaného vektorového priestoru k E_n).

Veta 1 (Jednoznačnosť lineárnej kombinácie bodov): Lineárna kombinácia bodov $P_0, \dots, P_m$ je definovaná jednoznačne (t.j. nezávisí od výberu bodu P).

Dôkaz: Nech $P, Q \in E_n$. Potom

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i P_i = P + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (P_i - P) = Q + (P - Q) + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (P_i - P) =$$
$$= Q + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (P_i - P + P - Q) = Q + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (P_i - Q).$$

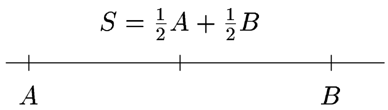
Analogicky možno dokázať nezávislosť lineárnej kombinácie v prípade, že $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 0$. □

Lineárna kombinácia bodov v euklidovskom priestore je analogickým pojmom ako lineárnej kombinácia vektorov vo vektorovom priestore.

Poznámka 1: Na počítanie s lineárnymi kombináciami bodov sa používa nasledujúce metapravidlo: *Ak máme výrok, ktorý je syntakticky správne vytvorený z lineárnych kombinácií bodov a vektorov, a ak po nahradení bodov a vektorov reálnymi číslami získame z neho pravdivý výrok, tak pôvodný výrok je pravdivý.*

Príklad 1: Nech $A, B \in E_n$ sú dva rôzne body. Zistite, ktorý bod predstavuje $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$.

Riešenie: Podľa definície $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = A + \frac{1}{2}(A - A) + \frac{1}{2}(B - A) = A + \frac{1}{2}(B - A)$. Teda ide o stred úsečky AB (pozri obr. 1 na strane 3). □



Obrázok 1: Stred úsečky AB

Príklad 2: Nech $A, B, C \in E_n$ sú body a nech platí $C = B + 2(B - A)$. Napíšte bod A ako lineárnu kombináciu bodov B a C.
Riešenie: Keďže $C = B + 2(B - A)$, tak môžme písať $\frac{1}{2}(C - B) = (B - A)$, teda $A = B - \frac{1}{2}(C - B)$. Hľadaná lineárna kombinácia je $A = \frac{3}{2}B - \frac{1}{2}C$. □

Predchádzajúce príklady, ale aj niektoré ďalšie cvičenia nám naznačia, že koeficienty lineárnej kombinácie môžme chápať ako „váhy" priradené jednotlivým bodom.
Cvičenie 1: Pozorujte, ako sa správa výsledný bod afinnej kombinácie v závislosti na zmene koeficientov afinnej kombinácie.
Cvičenie 2: Ako by ste zostrojili bod $S = \frac{m}{m+n}A + \frac{n}{m+n}B$, kde $m, n \in N$?
Cvičenie 3: Vyjadrite pomocou lineárnej kombinácie bodov A, B ľubovoľný bod priamky AB.
Cvičenie 4: Vyjadrite pomocou lineárnej kombinácie bodov A, B, C ľubovoľný bod trojuholníka ABC.

Definícia 2 (Deliaci pomer bodov): Nech $A, B, C \in E_n$ a $C \neq B$. Deliacim pomerom bodov A, B, C (v tomto poradí) nazývame reálne číslo λ také, že $(C - A) = \lambda(C - B)$. Budeme ho označovať (ABC).
Príklad 3: Zistite, aký je deliaci pomer bodov $A, B, S \in E_n$, pričom S je stred úsečky AB.
Riešenie: Hľadáme deliaci pomer bodov (ABS). Teda chceme vedieť, číslo λ v rovnosti $S - B = \lambda(S - A)$. Pozri obrázok 1. Platí ale $S - A = B - S \Rightarrow S - B = -1.(S - A)$. Teda hľadaný deliaci pomer je -1. □

Veta 2 (Deliace pomery troch rôznych kolineárnych bodov): Nech $A, B, C \in E_n$ sú také, že $A \neq B \neq C \neq A$. Potom platia nasledujúce rovnosti:

$$(BAC) = \frac{1}{(ABC)}, \quad (ACB) = 1 - (ABC), \quad (CAB) = \frac{1}{1 - (ABC)}$$

$$(BCA) = \frac{(ABC) - 1}{(ABC)}, \quad (CBA) = \frac{1}{(ABC) - 1}$$

Dôkaz: Dokážeme, že zámenou prvých dvoch bodov sa hodnota deliaceho pomeru prevráti. Platí totiž

$$(C - A) = (ABC)(C - B) \text{ a zároveň } (C - B) = (BAC)(C - A).$$

Teda $(BAC) = \frac{1}{(ABC)}$. Podobne platí pri zámene posledných dvoch bodov

$$(B - C) + (C - A) = (B - A) = (ACB)(B - C),$$

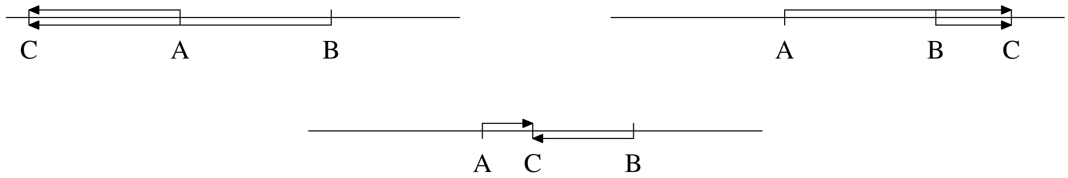
teda

$$(C - A) = (1 - (ACB))(C - B).$$

To znamená, že $(ABC) = 1 - (ACB)$. Ostatné prípady sa ukážu ľahko analogicky alebo využitím predchádzajúcich vzťahov a faktu, že vyššie uvedené permutácie bodov už generujú všetky zvyšné permutácie bodov v deliacom pomere. □

Deliaci pomer môže nadobudnúť rôzne reálne hodnoty. Pokúsme sa zistiť, ako závisia na polohe bodu C voči bodom A a B. Vo všeobecnosti môžu nastať tri prípady

i) Bod C nie je za bodom A (pozri obr. 2 na strane 4, vľavo). Vtedy majú vektory $C - A$ a $C - B$ rovnaký smer, pričom $\|C - A\| < \|C - B\|$. Teda $0 \leq (ABC) < 1$.
ii) Bod C je pred B a za bodom A (pozri obr. 2 na strane 4, dolu). Vtedy majú vektory $C - A$ a $C - B$ opačný smer. Teda $(ABC) < 0$.
iii) Bod C je za B (pozri obr. 2 na strane 4, vpravo). Vtedy majú vektory $C - A$ a $C - B$ rovnaký smer, pričom $\|C - A\| > \|C - B\|$. Teda $(ABC) > 1$.



Obrázok 2: Hodnoty deliaceho pomeru

Poznámka 2: Videli sme, že deliaci pomer nadobúda všetky hodnoty okrem 1. Táto hodnota je limitou (ABC), pokiaľ bod C konverguje k nevlastnému bodu priamky AB. V rozšírenom euklidovskom priestore možno definovať aj deliaci pomer $(ABB) = \infty$ a $(ABC^*) = 1$, kde C^* je nevlastný bod priamky AB.

Veta 3 (Štyri body na priamke): Nech $A, B, C, D \in E_n$ sú kolineárne body také, že $A \neq D$, $B \neq D$, $C \neq D$. Potom $(ABD)(BCD)(CAD) = 1$.

Dôkaz: Počítajme vyžijúc definície príslušných deliacich pomerov

$$(D - A) = (ABD)(D - B) = (ABD)(BCD)(D - C) = (ABD)(BCD)(CAD)(D - A).$$

Vzhľadom na to, že $D - A \neq \mathbf{o}$, musí platiť $(ABD)(BCD)(CAD) = 1$. □

Obrázok 3: Štyri body na priamke

Cvičenie 5: Vypočítajte (ABC), ak:
a) $A = [1, 0, 1], B = [1, 3, -2], C = [4, 9, -2]$
b) $A = [1, 1, 1], B = [2, 0, -1], C = \overleftrightarrow{AB} \cap \alpha, \alpha \equiv 2x - 3y + 2z = 0$
c) $A = [1, -1], B = A + 2\vec{u}, C = A - \vec{u}, \vec{u} = (1, 2)$

Veta 4 (Vzťah deliaceho pomeru a lineárnej kombinácie): Nech $C = (1-t)A + tB$ a $t \neq 1$. Potom $(ABC) = \frac{t}{t-1}$. Naopak, nech $\lambda = (ABC)$. Potom $C = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda-1}\right) A + \frac{\lambda}{\lambda-1} B$.

Dôkaz: Z predpokladu máme, že $(1 - t)(C - A) = t(B - C)$, z čoho už priamo plynie prvý výsledok.

Podobne vieme, že $(C - A) = \lambda(C - B)$, čo je to isté ako $\frac{1}{\lambda-1}(C - A) = \frac{\lambda}{\lambda-1}(C - B)$. Teda $C = \frac{\lambda}{\lambda-1}C + \frac{-1}{\lambda-1}C = \frac{-1}{\lambda-1}A + \frac{\lambda}{\lambda-1}B$. □

Cvičenie 6: Nech $C = A + t(B - A)$ a $t \neq 1$. Potom $(ABC) = \frac{t}{t-1}$. Naopak, nech $\lambda = (ABC)$. Potom $C = A + \frac{\lambda}{\lambda-1}(B - A)$. Dokážte!

Cvičenie 7: Dokážte, že ak sú body A, B, C nekolineárne, tak body $S_1 = A + \frac{1}{t}(B - A)$, $S_2 =$ stred (BC), $S_3 = C + \frac{1-t}{2-t}(A - C)$ pre prípustné t ležia na jednej priamke.

Cvičenie 8: V E^3 sú dané priamky p, q, rovina α a číslo $\lambda \neq 0, 1$. Určte množinu všetkých bodov $X \in E^3$, pre ktoré $(ABX) = \lambda$, $A \in p$, $B \in q$, ak:
a) p, q sú rôznobežné
b) $p \parallel q$
c) p, q sú mimobežné a $AB \parallel \alpha$

Cvičenie 9: Dané sú nekolineárne body A, B, C a body $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CA$, pričom $K \neq B$, $L \neq C$, $M \neq A$. Dokážte, že K, L, M sú kolineárne práve vtedy, keď $(ABK)(BCL)(CAM) = 1$. (Ide o známu Menelaovu vetu.)

Cvičenie 10: Dané sú nekolineárne body A, B, C a body $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CA$, pričom $K \neq B$, $L \neq C$, $M \neq A$. Dokážte, že priamky AK, BL, CM sú rovnobežné alebo konkurentné práve vtedy, keď $(ABK)(BCL)(CAM) = -1$. (Ide o známu Cevovu vetu.)

Cvičenie 11: Dané sú nekomplanárne body A, B, C, D a body $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$, $N \in DA$, pričom $K \neq B$, $L \neq C$, $M \neq D$, $N \neq A$. Dokážte, že K, L, M, N sú komplanárne práve vtedy, keď $(ABK)(BCL)(CDM)(DAN) = 1$. (Ide o analógiu Menelaovej vety z E^2.)

Cvičenie 12: Je daná kocka $ABCDA'B'C'D'$. Rovina α je určená bodom A, stredom steny $A'B'C'D'$ a stredom steny $B'C'CB$. Určte $(B'C'E)$, ak E je priesečník priamky $B'C'$ a roviny α.

Kapitola 3
Afinné zobrazenia euklidovských priestorov

Definícia 3 (Afinné zobrazenie): Nech $f : E_n \to E_m$ je zobrazenie euklidovských priestorov. Zobrazenie f nazývame afinným, ak zachováva lineárne kombinácie bodov t.j.

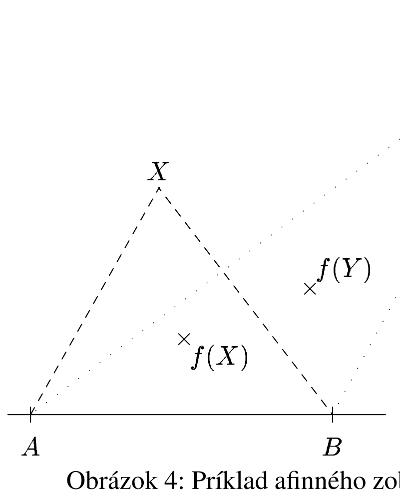
$$f\left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i P_i\right) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i f(P_i)$$

pre ľubovolné $P_0, \dots, P_m \in E_n$ a $\alpha_0, \dots, \alpha_m \in R$, pričom $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$.
Poznámka 3: V predchádzajúcej definícii používame len lineárne kombinácie, v ktorých je $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1$. Prečo?
Príklad 4: Nech $A, B \in E_2$ sú dva ľubovoľné navzájom rôzne body. Nech $f : E_2 \to E_2$ je zobrazenie, ktoré bodu $X \mapsto \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}X$. Zistite, či f je afinné zobrazenie. Ako by ste interpretovali toto zobrazenie?
Riešenie: Podľa predchádzajúcej definície afinné zobrazenie zachováva afinné kombinácie bodov. Nech $X = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i A_i$, pričom $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$. Potom

$$f(X) = f\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i A_i\right) = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n} \alpha_i A_i = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n} \alpha_i A + \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n} \alpha_i B + \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n} \alpha_i A_i =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \left(\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}A_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(A_i)$$

Teda zobrazenie f je afinné.

Interpretácia zobrazenia je založená na fakte, že ťažisko trojuholníka ABC sa dá zapísať ako afinná kombinácia bodov A, B, C s koeficientami $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$. Teda zobrazenie f priradí bodu X ťažisko trojuholníka ABX (pokiaľ tieto tri body tvoria trojuholník). □



Obrázok 4: Príklad afinného zobrazenia

Cvičenie 13: Nech $A \in E_n$ je pevne zvolený bod. Zobrazenie $f : E_n \to E_n$ priradí každému bodu $X \in E_n$ stred úsečky AX. Zistite, či je f afinné zobrazenie.
Cvičenie 14: Nech $A \in E_n$ je pevne zvolený bod. Zobrazenie $f : E_n \to E_n$ priradí každému bodu $X \in E_n$ bod A. Zistite, či je f afinné zobrazenie.
Cvičenie 15: Zistite, či posunutie je afinné zobrazenie.
Cvičenie 16: Zistite, či rovnoľahlosť je afinné zobrazenie.

Veta 5 (Ekvivalentné definície afinného zobrazenia): Nech $f : E_k \to E_m$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

i) zobrazenie f je afinné
ii) pre ľubovoľné $t \in R$ a body $A, B \in E_n$ platí $f((1-t)A + tB)) = (1-t)f(A) + tf(B)$
iii) ak $A \neq B \neq C \neq A$ sú kolineárne, tak $f(A) = f(B) = f(C)$ alebo $f(A) \neq f(B) \neq f(C) \neq f(A)$, body $f(A), f(B), f(C)$ sú kolineárne a $(ABC) = (f(A)f(B)f(C))$.

Dôkaz: Dôkaz urobime dokázaním ekvivalencie medzi prvými dvoma a poslednými dvoma výrokmi.
$\boxed{\text{i)}\Rightarrow\text{ii)}}$ je triviálne. Ide totiž o špeciálny prípad lineárnej kombinácie bodov.
$\boxed{\text{ii)}\Rightarrow\text{i)}}$ Budeme postupovať matematickou indukciou podľa počtu bodov v lineárnej kombinácii. Prípad $n = 0$ je triviálny. Prípad $n = 1$ znamená, že $X = (1 - t)A_0 + tA_1$. Teda $X = A_0 + t(A_1 - A_0)$. V takomto vyjadrení zobrazíme bod zobrazením f a využijúc predpoklad dostávame

$$f(X) = f(A_0) + t(f(A_1) - f(A_0)) = (1 - t)f(A_0) + tf(A_1)$$

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky lineárne kombinácie bodov s najviac n bodmi. A nech $X = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i A_i$, pričom $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$. Ak $\alpha_0 = 1$, tak niet čo riešiť. Aspo+n jeden koeficient lineárnej kombinácie je rôzny od 1. Keby totiž všetky boli rovné 1, ich suma by bola $n+1$, čo je pre $n > 0$ neprípustné. Bez ujmy na všeopbecnosti môžme predpokladať, že $\alpha_0 \neq 1$. Potom možno vyjadriť $X = \alpha_0 A_0 + (1 - \alpha_0)\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_0}A_1 + \ldots + \frac{\alpha_n}{1-\alpha_0}A_n\right)$. Analogicky ako v kroku pre $n = 1$ môžme použiť zobrazenie f a dostaneme

$$f(X) = \alpha_0 f(A_0) + (1 - \alpha_0) f\left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_0}A_1 + \ldots + \frac{\alpha_n}{1 - \alpha_0}A_n\right) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(A_i),$$

pretože platí $\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_0} = 1$ a využijeme indukčný predpoklad.
$\boxed{\text{ii)}\Rightarrow\text{iii)}}$ Nech $A, B, C \in E_n$ sú kolineárne body, $A \neq B \neq C \neq A$ a nech napríklad $f(A) = f(B)$. Položme $C = (1 - t)A + tB$, potom $f(C) = (1 - t)f(A) + tf(B) = f(A)$. Analogicky by sme dostali rovnosť obrazov aj v prípadoch, keď $f(A) = f(C)$ alebo $f(B) = f(C)$. (Urobte si to ako cvičenie!)

Predpokladajme teda, že $f(A)$, $f(B)$ a $f(C)$ sú po dvoch rôzne. Zo vzťahu $f(C) = (1 - t)f(A) + tf(B)$ je jasné, že ležia na jednej priamke a z vety 4 na strane 4 vyplýva, že $(ABC) = (f(A)f(B)f(C))$.
$\boxed{\text{iii)}\Rightarrow\text{ii)}}$ Nech $A, B \in E$ a $t \in R$ sú ľubovoľné. Ak $A = B$, tak riešenie je triviálne. (Urobte si ho ako cvičenie!) Nech teda ďalej $A \neq B$. Musíme rozlíšiť niekoľko prípadov. Nech $C = (1 - t)A + tB$. Potom môže nastať

a) $C = A$ alebo $C = B$ Vtedy $f(C) = f(A) = f(A) + 0(f(B) - f(A))$ alebo $f(C) = f(B) = f(A) + 1(f(B) - f(A))$. Teda náš vzťah v tomto prípade platí.
b) $A \neq B \neq C \neq A$ Podľa predpokladu buď $f(C) = f(A) = f(B)$, a potom $f(C) = f(A) = (1 - t)f(A) + tf(B)$, alebo $f(A) \neq f(B) \neq f(C) \neq f(A)$, sú kolineárne, teda $f(C) = (1 - s)f(A) + sf(B)$, a $(ABC) = (f(A)f(B)f(C))$, čo podľa vety 4 na strane 4 znamená, že

$$\frac{t}{t-1} = (ABC) = (f(A)f(B)f(C)) = \frac{s}{s-1}.$$

Z tejto rovnosti dostaneme, že $s = t$.

Uvedené prípady vyčerpávajú všetky možnosti. □

Cvičenie 17: V euklidovskom priesore E_2 je daný trojuholník BCD. Pre zobrazenie f platí: $f(B) = C$, $f(C) = D$, $f(D) = B$. Všetky ostatné body sú samodružné (t.j. zobrazia sa na seba). Je f afinné zobrazenie?
Cvičenie 18: Nech $f : E_n \to E_m$ a $g : E_m \to E_k$ sú afinné zobrazenia. Dokážte, že zložené zobrazenie $g \circ f$ je tiež afinné zobrazenie.

Afinné zobrazenie f determinuje ďalšie zobrazenie medzi vektorovými zložkami príslušných euklidovských vektorových priestorov.

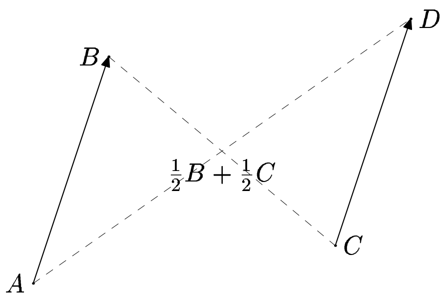
Definícia 4 (Asociované zobrazenie): Nech $f : E_n \to E_m$ je afinné zobrazenie. Zobrazenie f^* nazývame asociovaným zobrazením k afinnému zobrazeniu f, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

1) $f^* : V_n \to V_m$
2) $f^*(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i A_i) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f(A_i)$ pre ľubovoľné $A_0, \ldots, A_k \in E_n$, $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in R$ a $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 0$.

Poznámka 4: Predchádzajúca definícia vlastne hovorí, že asociované zobrazenie „zachováva" lineárne kombinácie bodov, ktorých výsledkom je vektor.

Veta 6 (Korektnosť definície asociovaného zobrazenia): Nech $\alpha_0 A_0 + \cdots + \alpha_k A_k = \beta_0 B_0 + \cdots + \beta_l B_l$ pre nejaké $\alpha_0 + \cdots + \alpha_k = \beta_0 + \cdots + \beta_l = 0$. Potom $f^*(\alpha_0 A_0 + \cdots + \alpha_k A_k) = f^*(\beta_0 B_0 + \cdots + \beta_l B_l)$.
Dôkaz: Z predpokladu vyplýva, že $\alpha_0 A_0 + \cdots + \alpha_k A_k = \beta_0 B_0 + \cdots + \beta_l B_l = B - B_0$ pre nejaké $B \in E_n$. Teda $B = B_0 + \alpha_0 A_0 + \cdots + \alpha_k A_k = B_0 + \beta_0 B_0 + \cdots + \beta_l B_l$. Keďže zobrazenie f je afinné a zachováva lineárne kombinácie bodov, tak $f(B) = f(B_0) + \alpha_0 f(A_0) + \cdots + \alpha_k f(A_k) = f(B_0) + \beta_0 f(B_0) + \cdots + \beta_l f(B_l)$. To už priamo dáva výsledok. □

Cvičenie 19: Dokážte bez použitia vety 6, že ak $B - A = D - C$, tak $f(B) - f(A) = f(D) - f(C)$ (pozri obr.5 na strane 7. Odvoďte z tohto výsledku vetu 6!



Obrázok 5: Rôzne polohy toho istého vektora

Veta 7 (Linearita asociovaného zobrazenia): Asociované zobrazenie f^* k afinnému zobrazeniu f je lineárne zobrazenie.
Dôkaz: Stačí ukázať, že $f^*(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f^*(\boldsymbol{u}) + f^*(\boldsymbol{v})$ a $f^*(c\boldsymbol{v}) = cf^*(\boldsymbol{v})$ pre ľubovolné $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V_n$ a $c \in R$. Nech $\boldsymbol{u} = \alpha_0 A_0 + \cdots + \alpha_k A_k$ a $\boldsymbol{v} = \beta_0 B_0 + \cdots + \beta_l B_l$, pričom $\alpha_0 + \cdots + \alpha_k = \beta_0 + \cdots + \beta_l = 0$ (overte, že to vždy ide!). Potom $f^*(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f^*(\alpha_0 A_0 + \cdots + \alpha_k A_k + \beta_0 B_0 + \cdots + \beta_l B_l) = \alpha_0 f(A_0) + \cdots + \alpha_k f(A_k) + \beta_0 f(B_0) + \cdots + \beta_l f(B_l) = f^*(\boldsymbol{u}) + f^*(\boldsymbol{v})$. Analogicky $f^*(c\boldsymbol{u}) = f^*(c\alpha_0 A_0 + \cdots + c\alpha_k A_k) = c\alpha_0 f(A_0) + \cdots + c\alpha_k f(A_k) = cf^*(\boldsymbol{u})$. □

Dôsledok 1 : Nech f je afinné zobrazenie. Potom $f(A + \boldsymbol{u}) = f(A) + f^*(\boldsymbol{u})$ pre ľubovoľné $A \in E_n$ a ľubovoľné $\boldsymbol{u} \in V_n$.
Dôkaz: Nech $\boldsymbol{u} = B - A$. Potom $f(A + \boldsymbol{u}) = f(A + (B - A)) = f(A) + (f(B) - f(A)) = f(A) + f^*(\boldsymbol{u})$. □

Cvičenie 20: Ukážte, že pre ľubovoľné afinné zobrazenie f platí $f(A + \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k) = f(A) + f^*(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k)$, pričom $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 0$.
Cvičenie 21: Určte asociované zobrazenie pre rovnoľahlosť.

Už z definície asociovaného zobrazenia sa dá usúdiť, že vzťah afinného a k nemu asociovaného zobrazenia je pomerne blízky.

Veta 8 (Vzťah afinného a asociovaného zobrazenia): Nech $\phi : V_n \to V_m$ je lineárne zobrazenie, $A \in E_n$, $B \in E_m$. Potom existuje práve jedno afinné zobrazenie $f : E_n \to E_m$ také, že $f(A) = B$ a $f^* = \phi$.
Dôkaz: Definujme zobrazenie $f : E_n \to E_m$ tak, že $f(X) = B + \phi(X - A)$. Treba ukázať, že f je afinné, spĺňa predpoklady tvrdenia a je jediné také.
Afinnosť. Nech $A_0, \ldots, A_k$ sú body z E_n a $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$. Potom

$$f\left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i A_i\right) = B + \phi\left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i A_i - A\right) = B + \phi\left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i (A_i - A)\right) =$$

$$= B + \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \phi(A_i - A) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i (B + \phi(A_i - A)) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f(A_i).$$

Teda f je afinné, lebo zachováva lineárne kombinácie bodov.
Predpoklady tvrdenia. $f(A) = B + \phi(A - A) = B + \mathbf{o} = B$. Podobne $f^*(D - C) = f(D) - f(C) = (B + \phi(D - A)) - (B + \phi(C - A)) = \phi(D - A) - \phi(C - A) = \phi(D - C)$.
Jednoznačnosť. Ukážeme ju nepriamo. Nech $g : E_n \to E_m$ je afinné zobrazenie také, že $g(A) = B$ a $g^* = \phi$. Potom podľa dôsledku 1 platí $g(X) = g(A) + g^*(X - A) = B + \phi(X - A) = f(X)$. Teda $f = g$. □

Poznámka 5: Podľa základnej vety o lineárnych zobrazeniach je každé lineárne zobrazenie $\phi : V_n \to V_m$ jednoznačne dané obrazmi prvkov nejakej bázy priestoru V_n. Nasledujúci dôsledok využíva tento fakt.
Dôsledok 2 : Nech $\langle A, \boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n} \rangle$ je afinná súradnicová sústava v E_n, $B \in E_m$, $\boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_n} \in V_m$. Potom existuje jediné afinné zobrazenie $f : E_n \to E_m$ také, že $f(A) = B$ a $f^*(\boldsymbol{e_i}) = \boldsymbol{f_i}$ pre $i = 1, \ldots, n$.
Dôkaz: Nech $\phi : V_n \to V_m$ je definované tak, že $\phi(\boldsymbol{e_i}) = \boldsymbol{f_i}$ pre $i = 1, \ldots, n$. Také zobrazenie je podľa základnej vety o lineárnych zobrazeniach jediné. Teda podľa vety 8 je takto definované afinné zobrazenie jednoznačné. □

Dôsledok 3 : Nech $\langle O, \boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n} \rangle$ je afinná súradnicová sústava v E_n, $\bar{O} \in E_m$, $\boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_n} \in V_m$. Nech $f : E_n \to E_m$ je také afinné zobrazenie, že $f(O) = \bar{O}$ a $f^*(\boldsymbol{e_i}) = \boldsymbol{f_i}$ pre $i = 1, \ldots, n$. Potom ak $X = O + x_1 \boldsymbol{e_1} + \ldots + x_n \boldsymbol{e_n}$, tak $f(X) = \bar{O} + x_1 \boldsymbol{f_1} + \ldots + x_n \boldsymbol{f_n}$.

Dôkaz: Tvrdenie vety dostaneme aplikovaním predchádzajúceho dôsledku a vety 7. □

Definícia 5 (Lineárne nezávisla množina bodov): Nech $A_0, \dots, A_k \in E_n$, $k > 0$ je množina bodov. Hovoríme, že body sú lineárne nezávislé, ak sú lineárne nezávislé vektory $A_1 - A_0, \dots, A_k - A_0$.
Poznámka 6: Z definície vidno, že v E_n nemôže existovať viac ako $n + 1$ lineárne nezávislých bodov. Naviac tento počet sa dá dosiahnuť. Premyslite si ako!
Cvičenie 22: Nech $A_0, \dots, A_n \in E_n$ je lineárne nezávislá množina bodov. Dokážte, že ľubovoľný bod priestoru E_n sa dá napísať ako ich lineárna kombinácia. Je tento zápis jednoznačný?

Veta 9 (Jednoznačnosť afinného zobrazenia): Nech $f : E_n \to E_m$ je afinné zobrazenie. Potom f je jednoznačne určené obrazmi $n + 1$ lineárne nezávislých bodov z E_n.
Dôkaz: Nech $A_0, \dots, A_n$ je $n+1$ nezávislých bodov v E_n a nech $B_0, \dots, B_n$ sú obrazy týchto bodov v zobrazení f. Označme $\boldsymbol{e_1} = A_1 - A_0, \dots, \boldsymbol{e_n} = A_n - A_0$ (tieto sú podľa definície 5 nezávislé) a nech obrazmi týchto vektorov sú vektory $B_1 - B_0, \dots, B_n - B_0$ v tomto poradí. Podľa dôsledku 2 na strane 7 je takto jednoznačne definované afinné zobrazenie. Treba len overiť, či takto definované zobrazenia spĺňa podmienku, že $f(\boldsymbol{e_i}) = \boldsymbol{f_i}$. (Urobte si to ako cvičenie!)

Jednoznačnosť môžme dokázať aj inak, za predpokladu, že máme dokázanú existenciu zobrazenia f. Nech $f, g : E_n \to E_m$ sú dve afinné zobrazenia také, že pre afinne nezávislú množinu bodov $A_0, \dots, A_n$ platí $f(A_i) = g(A_i)$ pre $i = 0, \dots, n$. Ukážeme, že $f(X) = g(X)$ pre ľubovolné $X \in E_n$.

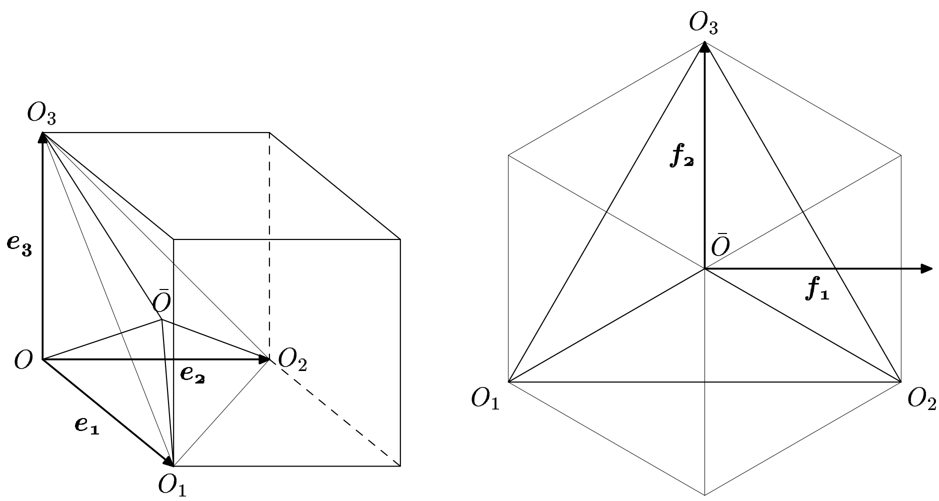
Nech $X = a_0A_0 + \cdots a_nA_n$, $\sum_{i=0}^n a_i = 1$. Potom môžme písať

$$f(X) = f(\sum_{i=0}^{n} a_iA_i) = \sum_{i=0}^{n} a_if(A_i) = \sum_{i=0}^{n} a_ig(A_i) = g(\sum_{i=0}^{n} a_iA_i) = g(X)$$

Teda $f = g$. □

Príklad 5: Určte afinné zobrazenie $f : E_3 \to E_2$, ktoré reprezentuje kolmé premietanie do roviny α určenej bodmi O_1, O_2, O_3 (pozri obr. 6 na strane 9).
Riešenie: Nech $\langle O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\rangle$ je ortonormálna súradnicová sústava v E_3. Ďalej nech $\langle \bar{O}, \boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}\rangle$ je afinná súradnicová sústava v rovine α, pričom $\bar{O}$ je päta kolmice z O do roviny α, $\boldsymbol{f_2} = O_3 - \bar{O}$ a $\boldsymbol{f_1} \perp \boldsymbol{f_2}$, $\|\boldsymbol{f_1}\| = \|\boldsymbol{f_2}\|$, pričom vektory $\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \bar{O} - O$ tvoria kladnú bázu v priestore V_3. Potom zobrazenie f možno určiť nasledovne:

$$\begin{aligned} O &\mapsto \bar{O} \\ \boldsymbol{e_1} &\mapsto -\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{f_1} - \frac{1}{2}\boldsymbol{f_2} \\ \boldsymbol{e_2} &\mapsto \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{f_1} - \frac{1}{2}\boldsymbol{f_2} \\ \boldsymbol{e_3} &\mapsto \boldsymbol{f_2} \end{aligned}$$



Obrázok 6: Premietanie do roviny $O_1O_2O_3$. Priemet do roviny $O_1O_2O_3$

Ľubovoľný bod $X \in E_3$ sa dá napísať v báze $X = O + x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + x_3\boldsymbol{e_3}$. Jeho obraz v afinnom zobrazení f bude

$$\begin{aligned} f(X) &= f(O) + x_1 f^*(\boldsymbol{e_1}) + x_2 f^*(\boldsymbol{e_2}) + x_3 f^*(\boldsymbol{e_3}) = \\ &= \bar{O} + x_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{f_1} - \frac{1}{2}\boldsymbol{f_2}\right) + x_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{f_1} - \frac{1}{2}\boldsymbol{f_2}\right) + x_3\left(\boldsymbol{f_2}\right) = \\ &= \bar{O} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)\boldsymbol{f_1} + \left(-\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3\right)\boldsymbol{f_1} \end{aligned}$$

V maticovom tvare možno predchádzajúce zobrazenie zapísať nasledovne

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

□

Veta 10 (Injektívnosť, surjektívnosť afinného zobrazenia): Nech $f : E_n \to E_m$ je afinné zobrazenie. Potom platia nasledujúce tvrdenia:

a) f je injektívne zobrazenie práve vtedy, keď f^* je injektívne zobrazenie
b) f je surjektívne zobrazenie práve vtedy, keď f^* je surjektívne zobrazenie
c) f je bijektívne zobrazenie práve vtedy, keď f^* je bijektívne zobrazenie

Dôkaz: Zobrazenie f je injektívne práve vtedy, keď platí:

$$f(A) = f(B) \Rightarrow A = B \text{ pre ľubovolné } A, B \in E_n.$$

Ale $f(A) = f(A + \mathbf{o}) = f(A + (B - A)) \Leftrightarrow f^*(\mathbf{o}) = f^*(B - A)$. Teda $f^*(\mathbf{o}) = f^*(B - A) \Rightarrow A = B$ práve vtedy, keď f^* je injektívne (zobrazí na nulový vektor len nulový vektor).

Analogicky pre surjektívnosť. Nech $O \in E_n$. Nech $B' \in E_m$. Potom existuje také $B \in E_n$, že $f(B) = B'$ práve vtedy, keď $f(O + B - O) = f(O) + f(B) - f(O) = B'$, teda práve vtedy, keď $B' - f(O) = f^*(B - O)$. Čo znamená, keďže bod B' bol ľubovoľný, že f^* je surjektívne (každý vektor priestoru E_m má svoj vzor).

Bijektívnosť dostaneme kombináciou prípadov a) a b). □

Veta 11 (Zachovávanie lineárnych variét): Nech $f : E_n \to E_m$ je afinné zobrazenie. Potom platia tvrdenia

i) ak $\alpha \subset E_n$ je lineárna variéta, tak $f(\alpha)$ je lineárna variéta v E_m a $\dim f(\alpha) \le \dim \alpha$
ii) ak $\alpha \| \beta$ sú lineárne variéty v E_n, tak $f(\alpha) \| f(\beta)$ v E_m.

Dôkaz: Nech α je lineárna variéta v E_n. Stačí ukázať, že ak $P, Q \in f(\alpha)$, tak aj ich ľubovoľná lineárna kombinácia je z $f(\alpha)$. Nech $P = f(A)$ a $Q = f(B)$, kde $A, B \in \alpha$. Potom pre ľubovoľné $t \in R$ platí $(1 - t)P + tQ = (1 - t)f(A) + tf(B) = f((1 - t)A + tB) \in f(\alpha)$, keďže α je lineárna variéta.

Z geometrie lineárnych variét vieme, že $\alpha = A + V_\alpha$ pre ľubovoľné $A \in \alpha$. Teda $f(\alpha) = f(A) + f^*(V_\alpha)$, čo znamená, že $V_{f(\alpha)} = f^*(V_\alpha)$. Z lineárnej algebry vieme, že $\dim f^*(V_\alpha) \le \dim V_\alpha$, teda platí, že $\dim f(\alpha) \le \dim \alpha$.

Nech $\alpha \| \beta$. To je práve vtedy, keď $V_\alpha \subset V_\beta$ alebo $V_\beta \subset V_\alpha$. Potom ale musí platiť, že $f(V_\alpha) \subset f(V_\beta)$ alebo $f(V_\beta) \subset f(V_\alpha)$, čo je ekvivalentné s tvrdením $V_{f(\alpha)} \subset V_{f(\beta)}$ alebo $V_{f(\beta)} \subset V_{f(\alpha)}$, a to už nie je nič iné ako $f(\alpha) \| f(\beta)$. □

Cvičenie 23: Dokážte, že vzor lineárnej variéty v afinnom zobrazení je lineárna variéta.

Kapitola 4
Analytické vyjadrenie afinného zobrazenia

Zápis afinného zobrazenia v príklade 5 na strane 8 ukazuje, že pri zápise i manipulácii s afinnými zobrazeniami možno využiť matice, pretože každé lineárne zobrazenie sa dá zapísať formou matice. Podľa toho, čo potrebujeme vyjadriť, možno použiť niekoľko druhov zápisov.

1) Afinné súradnice

Nech je v E_n daná afinná súradnicová sústava $\langle O, \boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\rangle$ a v E_m podobne $\langle O, \boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_m}\rangle$. Nech $f : E_n \to E_m$ je dané na repére $\langle O, \boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\rangle$, pričom obrazy

$$\begin{aligned} f(O) &= [r_1, \dots, r_m]^T \\ f(\boldsymbol{e_1}) &= (a_{11}, \dots, a_{m1})^T \\ &\vdots \\ f(\boldsymbol{e_n}) &= (a_{1n}, \dots, a_{mn})^T \end{aligned}$$

sú dané na repéri $\langle P, \boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_n}\rangle$ Nech $\mathbb{X} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ v repéri $\langle O, \boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}\rangle$ a jeho obraz $f(X) \in E_n$ je $f(X) = [y_1, \ldots, y_m]^T$ v repéri $\langle P, \boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_m}\rangle$. Potom

$$f(X) = f(O) + x_1 f^*(\boldsymbol{e_1}) + \ldots + x_n f^*(\boldsymbol{e_n}),$$

čo možno zapísať v maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} \tag{1}$$

alebo

$$\mathbb{Y} = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{R}.$$

kde $\mathbb{R}$ sa nazýva vektor posunutia a matica $\mathbb{A} = (f^*(\boldsymbol{e}_1), f^*(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f^*(\boldsymbol{e}_n))$ sa nazýva maticou asociovaného zobrazenia f^*. Tento zápis afinného zobrazenia nazývame analytické vyjadrenie afinného zobrazenia f vzhľadom k afinnej súradnicovej sústave $\langle O, \boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}\rangle$ v E_n a $\langle O, \boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_m}\rangle$ v E_m.

Afinné zobrazenia sú teda len tie zobrazenia, ktoré majú tvar (1). Z tohto zápisu tiež vidno, že asociované zobrazenie k afinnému zobrazeniu f má v príslušných bázach V_n a V_m vyjadrenie

$$\mathbb{Y} = \mathbb{A}\mathbb{X}.$$

Príklad 6: Nájdite maticu afinnej transformácie $f : E_2 \to E_2$, pričom platí

$$[0,0] = O \mapsto P = [1,1]$$
$$[1,0] = E_1 \mapsto E_1 = [1,0]$$
$$[0,1] = E_2 \mapsto E_2 = [0,1]$$

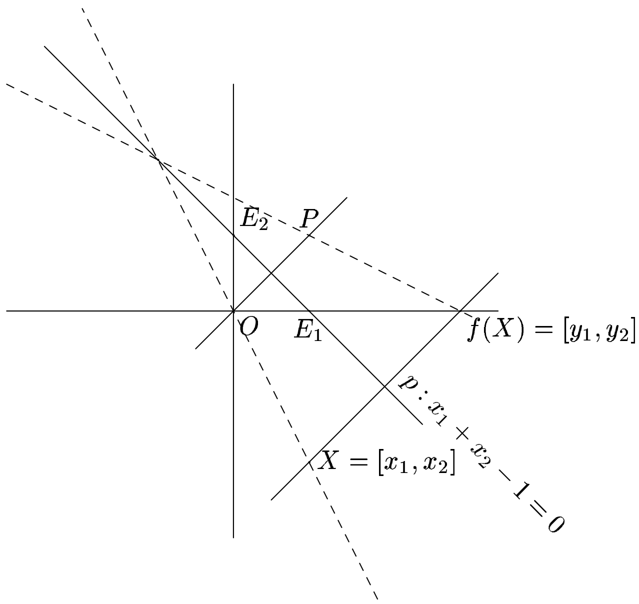
Nájdite samodružné body tejto transformácie.
Riešenie: V afinnej súradnicovej sústave $\langle O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}\rangle$ môžeme písať analytické vyjadrenie

$$\begin{aligned} y_1 &= - x_2 + 1 \\ y_2 &= -x_1 + 1 \end{aligned}$$

Samodružné body nájdeme riešením rovníc

$$\begin{aligned} x_1 &= - x_2 + 1 \\ x_2 &= -x_1 + 1 \end{aligned}$$

Ľahko vidno, že riešením je priamka $p : x_1 + x_2 - 1 = 0$. Ďalej môžme spočítať vektor $f(X) - X = (-x_1 - x_2 + 1, -x_1 - x_2 + 1) = (-x_1 - x_2 + 1)(1, 1)$. Neskôr uvidíme, že týmito údajmi je daná osová súmernosť podľa priamky p (pozri obr.7 na strane 11)



Obrázok 7: Osová súmernosť podľa priamky p

□

2) Rozšírené afinné súradnice

Pomocou rozšírených afinných súradníc možno zjednotiť zápis súradníc vektora a bodu tak, že už priamo z týchto súradníc budeme vedieť o aký objekt ide. Bod $X = [x_1, \dots, x_n]^T \rightsquigarrow [1, x_1, \dots, x_n]^T = \tilde{X}$ a vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)^T \rightsquigarrow (0, u_1, \dots, u_n)^T = \tilde{\boldsymbol{u}}$. Prvú súrtadnicu môžme čítať podľa kontextu „bod" alebo „vektor". Pre takto zavedené rozšírenie platí obvyklá aritmetika s bodmi a vektormi z euklidovských priestorov. V rozšírených afinných súradniciach možno potom písať analytické vyjadrenie zobrazenia takto

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbb{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{R} & \mathbb{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbb{X} \end{pmatrix},$$

pričom $\mathbb{Y}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{X}$, $\mathbb{A}$ má ten istý význam ako pri afinných súradniciach a $\mathbb{O}$ je nulový riadkový vektor adekvátnej dĺžky.

Poznámka 7: Možnosť tohto zápisu vyplýva z geometrie projektívnych priestorov a analytického zápisu kolineácií medzi nimi.

3) Barycentrické súradnice

Ak máme afinnú súradnicovú sústavu zapísanú vo forme $\langle A_0, A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0\rangle$, tak potom možno ľubovoľný bod písať vo forme

$$X = A_0 + x_1(A_1 - A_0) + \cdots + x_n(A_n - A_0) = (1 - x_1 - \cdots x_n)A_0 + x_1A_1 + \cdots + x_nA_n,$$

čo je lineárna kombinácia bodov tvoriacich afinnú súradnicovú sústavu. Kedže afinné zobrazenie f zachováva lineárne kombinácie bodov, možno súradnice obrazu bodu X získať ako

$$f(X) = (1 - x_1 - \cdots x_n)f(A_0) + x_1A_1 + \cdots + x_nf(A_n) = \begin{pmatrix} f(A_0) & \cdots & f(A_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - x_1 - \cdots x_n \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

kde $f(A_i)$ je stĺpec súradníc (prípadne aj rozšírených) prisluchajúci obrazu bodu A_i v zobrazení f. V takomto prípade nazývame $n+1$-ticu $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, kde $x_0 = 1 - x_1 - \cdots - x_n$, barycentrickými súradnicami bodu X vzhľadom k bodom $A_0, A_1, \dots, A_n$. Uvedomte si, že pri tomto zápise dostavame z barycentrických súradníc afinné súradnice a nie opäť barycentrické (tie sú totožné).

Definícia 6 (Afinná transformácia. Afinita.): Nech $f : E_n \to E_n$ je afinné zobrazenie. Potom f sa nazýva afinná transformácia priestoru E_n. Ak f je bijektívne zobrazenie, tak f nazývame afinitou prietoru E_n.

Definícia 7 (Priama a nepriama afinita): Afinitu s analytickým vyjadrením $\mathbb{Y} = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{R}$ nazývame priamou afinitou, ak $\det \mathbb{A} > 0$. V opačnom prípade nazývame nepriamou afinitou.

Poznámka 8: Kladná hodnota determinantu matice $\mathbb{A}$ znamená, že transformácia zachováva orientáciu. Tvrdenie platí aj naopak, ak transformácia zachováva orientáciu, tak determinant matice tohoto zobrazenia je kladný.

Z definície afinnej transformácie a z analytického vyjadrenia afinného zobrazenia vyplýva, že afinné transformácie budú reprezentované štvorcovými maticami (matica $\mathbb{A}$ vo vyjadrení).

Veta 12 (Bijektívnosť transformácie): Nech $f : E_n \to E_n$ je dané rovnicami $\mathbb{Y} = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{R}$ v súradnicovej sústave $\langle O, \boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\rangle$. Potom afinná transformácia f je bijektívna práve vtedy, keď matica $\mathbb{A}$ je regulárna.

Dôkaz: Stačí si uvedomiť, že asociované zobrazenie je bijektívne práve vtedy, keď je matica $\mathbb{A}$ regulárna a použiť vetu 10 na strane 9.

□

Ak zložíme dve afinity, dostaneme opäť afinitu. Táto skutočnosť je evidentná. Inverzným zobrazením k afinite je opäť afinita. Naviac identické zobrazenie je tiež afinitou. Z týchto faktov vyplýva, že všetky afinity priestoru E_n spolu s operáciou skladania tvoria grupu. Označujeme ju zvyčajne $GA(E_n)$. Neskôr si ukážeme niektoré jej podgrupy.

Cvičenie 24: Vo vhodnej súradnicovej sústave napíšte analytické vyjadrenie zobrazenia f, ktoré vrcholom trojuholníka ABC priradí stredy protiľahlých strán. V tej istej súradnicovej sústave napíšte analytické vyjadrenie zobrazenia h, ktoré zobrazuje body A, B, C do bodov A, B, T, kde T je ťažisko trojuholníka ABC. Určte analitické vyjadrenia zobrazení $h \circ f$, $f \circ h$, f^{-1} a h^{-1}.

Cvičenie 25: V euklidovskej rovine E_2 je daný trojuholník ABC. Afinné zobrazenie f zobrazuje A do B, B do C a C do A. Určte k nemu asociované zobrazenie g. Vyjadrite f, g vo vhodne zvolenej afinnej súradnicovej sústave.

Cvičenie 26: Afinné zobrazenie $f : E_2 \to E_2$ zobrazuje body $[2, 1]$, $[3, 0]$, $[1, 4]$ do bodov $[1, 6]$, $[1, 9]$, $[3, 1]$ v tomto poradí. Kam sa zobrazí bod $[5, 7]$? Ktorý bod sa zobrazí sám na seba?
Cvičenie 27: Určte afinné zobrazenie $f : E_2 \to E_2$ zobrazujúce body $[0, 0]$, $[1, 0]$, $[0, 1]$ do bodov $[0, 0]$, $[1, 0]$, $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ v tomto poradí. Pokúste sa ho geometricky interpretovať.
Cvičenie 28: Určte afinné zobrazenie , ktoré zobrazuje body $[1, 0] \to [2, 3], [0, 2] \to [-1, 4], [-3, 0] \to [-2, -1]$
Cvičenie 29: Dané je afinné zobrazenie $f\colon \{x' = 2x + 3y + 5, y' = 4x - 3y - 2\}$. Určte

a) do akých bodov sa zobrazia body $[0, 0]$, $[5, 2]$, $[-1, 4]$
b) čo je obrazom osí v rovine
c) ako sa zobrazia priamky $2x + 3y + 5 = 0$, $4x - 3y - 2 = 0$
d) čo je obrazom priamky $2x - 6y - 7 = 0$

Cvičenie 30: Dané je afinné zobrazenie $f\colon \{x' = 3x + y - 6, y' = x + y + 1\}$. Ktoré body sa zobrazia do bodov $[9, 8]$ a $[-6, 1]$?
Cvičenie 31: Afinné zobrazenie $f : E_2 \to E_3$ je vo vhodnej súradnicovej sústave dané predpisom $f \equiv \{x'_1 = x_1 - x_2 + 1, x'_2 = x_1 + x_2, x'_3 = x_2 + 2\}$. Určte obraz začiatku v E_2, vzor začiatku v E_3 a zistite, či je zobrazenie injektívne a surjektívne.
Cvičenie 32: Zistite, či je zobrazenie $f \equiv \{x'_1 = -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 1, x'_2 = 2x_1 + 3x_2 - 3x_3, x'_3 = x_2 - x_3 + 4\}$ injektívne.
Cvičenie 33: V euklidovskej rovine je daný trojuholník ABC s ťažiskom T. Afinné zobrazenie zobrazuje bod C do bodu T, body A, B sa zobrazujú na seba. Napíšte rovnice tohto zobrazenia v dvoch vhodne zvolených súradnicových sústavách.
Cvičenie 34: Nájdite všetky body $X = [x, y, z]^T$, ktoré sa zobrazia do $M = [4, 3]^T$ v zobrazení $f \equiv \{x' = 2x - z + 1, y' = x + y\}$.
Cvičenie 35: Nájdite afinné zobrazenie, ktoré

a) zobrazuje bod $[6, -2]$ na bod $[1, 1]$ a vektory $(2, 1)$, $(-1, 2)$ do vektorov $(4, 2)$ a $(-3, 6)$.
b) zobrazuje každý z bodov $[0, 0, 0]$, $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ na seba a $[0, 0, 1]$ na $[1, 1, 1]$.

Cvičenie 36: Vrcholy štvorstena $ABCD$ sú v bodoch $A[0, 0, 0]$, $B[1, 0, 0]$, $C[0, 1, 0]$, $D[0, 0, 1]$. Nájdite afinné zobrazenie, ktoré ponechá bod A na mieste a stredy hrán AB, AC, AD zobrazuje do stredov protiľahlých hrán.
Cvičenie 37: Akú podmienku musia spĺňať koeficienty l_1, l_2 v rovniciach afinity f, aby stredy úsečiek v tejto afinite zodpovedajúcich si bodov ležali na priamke $p \equiv ax+by+c = 0$, $f \equiv \{x' = x+l_1(ax+by+c), y' = y+l_2(ax+by+c)\}$.
Cvičenie 38: Určte afinné zobrazenie, pre ktoré sú body priamky $a \equiv 2x + y + 1 = 0$ samodružné a bod $A[0, 0]$ sa zobrazí do $A[-1, -2]$.
Cvičenie 39: Určte obraz priamok p, p‘ v afinnom zobrazení f, ktoré je dané predpisom $f\colon \{x' = 2x + y - 1, y' = y - z + 1, z' = x - y + 2z\}$, $p\colon \{x = 1 + t, y = -1 + 2t, z = t\}$, $p'\colon \{x + z - 1 = 0, 2x - y - 3 = 0\}$.
Cvičenie 40: Nech $f, g : E_2 \to E_2$ sú dané predpismi $f \equiv \{x' = 2x + y - 5, y' = 3x - y + 7\}$ a $g \equiv \{x' = x - y + 4, y' = -x + 2y + 5\}$. Nájdite $f \circ g$ a $g \circ f$!
Cvičenie 41: Nech $f : E_n \to E_m$ a $g : E_m \to E_k$ sú afinné zobrazenia s analytickými vyjadreniami $\mathbb{Y} = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{R}$ a $\mathbb{Y} = \mathbb{B}\mathbb{X} + \mathbb{S}$, pričom repér je v oboch prípadoch v priestore E_m rovnaký. Aké je analytické vyjadrenie zobrazenia $g \circ f$?
Cvičenie 42: Určte inverzné zobrazenie k zobrazeniu $x' = 2x + 3y - 7, y' = 3x + 5y - 9$.
Cvičenie 43: Dané je afinné zobrazenie $x' = 3x + 4y - 12, y' = 4x - 3y + 6$. Na priamke $p : 7x - 2y - 24 = 0$ nájdite bod, ktorého obraz leží na tej istej priamke.

Kapitola 5
Samodružné prvky afinnej transformácie

Samodružné prvky (body a variéty) hrajú signifikantnú rolu pri klasifikácii afinných transformácii. Na základe ich „množstva” a kvality vieme určiť, ako sa príslušné zobrazenie správa a vieme nájsť kanonický tvar tohto zobrazenia vo vhodnej báze.

Definícia 8 (Samodružný bod): Nech $f : E_n \to E_n$ je afinná transformácia. Ak $f(X) = X$ pre nejaké $X \in E_n$, tak hovoríme, že bod X je pevným bodom zobrazenia f.

Veta 13 (Samodružné body afinnej transformácie): Nech f je afinná transformácia a má aspoň jeden samodružný bod. Potom množina všetkých samodružných bodov afinnej transformácie f tvorí lineárnu variétu v priestore E_n.
Dôkaz: Lineárna variéta v E_n je množina bodov, do ktorej s každými dvoma rôznymi bodmi A, B patria aj body z priamky určenej bodmi A, B. Ukážeme, že toto platí pre množinu samodružných bodov zobrazenia f.

Množina samodružných bodov obsahujúca práve jeden samodružný bod je lineárnou variétou v E_n. V ďalšom budeme uvažovať, že množina všetkých samodružných bodov transformácie f obsahuje aspoň dva prvky.

Nech A, $B \in E_n$ sú dva rôzne samodružné body. Nech $X = (1-t)A + tB$ je nejaký bod z priamky AB. Potom môžme písať

$$f(X) = f((1-t)A + tB) = (1-t)f(A) + tf(B) = (1-t)A + tB = X,$$

a teda aj bod X je samodružným bodom afinnej transformácie f. Z toho už výsledok priamo vyplýva. □

Samodružné body sa dajú hľadať riešením lineárnych rovníc, ktoré však nie je ľahké pre priestory s vyššou dimenziou získať. Nech $f : E_n \to E_n$ je afinná transformácia , ktorá má v repéri $\langle O, \boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n} \rangle$ analytické vyjadrenie $\mathbb{Y} = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{R}$. Potom súradnice samodružných bodov v tomto repéri možno získať riešením systému rovníc

$$\mathbb{X} = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{R}$$

alebo

$$(\mathbb{A} - \mathbb{I})\mathbb{X} = -\mathbb{R},$$

čo možno písať

$$\begin{aligned} (a_{11} - 1)x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= -r_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + (a_{nn} - 1)x_n &= -r_n, \end{aligned}$$

kde matica $\mathbb{A} - \mathbb{I}$ je maticou tejto sústavy. Z toho (a z Frobéniovej vety) ihneď vidno, že množina samodružných bodov je buď prázdna alebo lineárna varieta dimenzie $n - h(\mathbb{A} - \mathbb{I})$.

Okrem samodružných bodov sú pre afinnú transformáciu význačné aj niektoré ďalšie samodružné prvky. Nech $f : E_n \to E_n$ je afinná transformácia a p je taká priamka v E_n, že $f(P) = P$ pre každý bod $P \in p$. Nech q je priamka, pričom $q \| p$. Potom platí $f(q) \| f(p) = p \| q$, teda $f(q) \| q$. To platí práve vtedy, keď smerový vektor $\boldsymbol{u}$ priamky q je nenulovým násobkom smerového vektora $f^*(\boldsymbol{u})$ priamky $f(q)$. Teda keď platí $f^*(\boldsymbol{u}) = c\boldsymbol{u}$.

Definícia 9 (Centrálno-afinná transformácia): Transformácia, ktorá má aspoň jeden samodružný bod sa nazýva centrálno-afinná transformácia.

Poznámka 9: Bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať, že týmto bodom je počiatok afinnej súradnicovej sústavy. Prečo?

Definícia 10 (Posunutie): Transformácia, ktorej matica analytického vyjadrenia je jednotková sa nazýva posunutie.

Veta 14 : Každá afinná transformácia sa dá napísať ako súčin centrálno-afinnej transformácie a posunutia.
Dôkaz: Vyplýva priamo z definícií a analytického vyjadrenia oboch typov afinných transformácií. □

Definícia 11 (Samodružný smer): Nech $f : E_n \to E_n$ je afinná transformácia. Ak $f^*(\boldsymbol{u}) = c\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u} \in V_n$, $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{o}$, $c \in R$ tak hovoríme, že smer (jednorozmerný podpriestor priestoru V_n) reprezentovaný vektorom $\boldsymbol{u}$ je samodružným smerom zobrazenia f. Číslo c nazývame vlastným číslom zobrazenia f prislúchajúcim k samodružnému smeru $\boldsymbol{u}$.

Definícia 12 (Samodružná varieta): Nech $f : E_n \to E_n$ je afinná transformácia a $\mathcal{V} \subset E_n$ je lineárna varieta. Ak $f(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$, tak hovoríme, že lineárna varieta $\mathcal{V}$ je samodružná (invariantná). Ak naviac platí pre každý bod $X \in \mathcal{V}$ rovnosť $f(X) = X$, tak hovoríme, že lineárna varieta $\mathcal{V}$ je bodovo samodružná.

Samodružné smery možno počítať riešením systémov lineárnych rovníc. Získať ich však už nemusí byť také ľahké. Nech f je reprezentované ako $\mathbb{Y} = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{R}$. Potom f^* je reprezentované ako $\mathbb{Y} = \mathbb{A}\mathbb{X}$. Samodružné (alebo vlastné) vektory zobrazenia f^* reprezentujú samodružné smery zobrazenia f. Pre ne platí nasledujúci systém rovníc

$$c\mathbb{X} = \mathbb{A}\mathbb{X}$$

alebo

$$(\mathbb{A} - c\mathbb{I})\mathbb{X} = \mathbf{o}.$$

Ide o homogénny systém lineárnych rovníc a ten má netriviálne riešenie práve vtedy, keď

$$\det(\mathbb{A} - c\mathbb{I}) = 0. \tag{2}$$

Rovnicu (2) nazývame charakteristická rovnica lineárneho zobrazenia f^* (ide o polynomickú rovnicu s neznámou c). Jej koreňmi sú všetky možné vlastné hodnoty prislúchajúce zobrazeniu f^*. Nech sú to čísla $c_1, \ldots, c_n$ (môžu byť aj komplexné a rovnaké). Potom ku hodnote c_i počítame prislúchajúci vlastný vektor ako netriviálny koreň systému homogénnych rovníc

$$(\mathbb{A} - c_i\mathbb{I})\mathbb{X} = \mathbf{o}.$$

Ukážeme si to na príklade.

Príklad 7: Nech zobrazenie $f : E_2 \to E_2$ je zobrazenie z príkladu 6 na strane 10. Nájdite jeho samodružné smery.

Riešenie: V príklade 6 na strane 10 sme videli, že zobrazenie f má analytické vyjadrenie

$$y_1 = -x_2 + 1$$
$$y_2 = -x_1 + 1$$

Teda počítajme

$$(\mathbb{A} - c\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} -c & -1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}$$
$$\det(\mathbb{A} - c\mathbb{I}) = c^2 - 1 = 0$$

Z toho ihneď vidno, že $c_1 = 1$ a $c_2 = -1$. Pre každú z týchto hodnôt riešime systém rovníc.

$\boxed{c_1 = 1}$

$$\mathbf{o} = (\mathbb{A} - c_1\mathbb{I})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Teda netriviálnym riešením je vektor $(-1, 1)$, čo znamená, že tento smer je samodružný.

$\boxed{c_2 = -1}$

$$\mathbf{o} = (\mathbb{A} - c_2\mathbb{I})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

V tomto prípade je netriviálnym riešením vektor $(1, 1)$, čo znamená, že aj tento smer je samodružný. □

Cvičenie 44: Premyslite si vzťah medzi pojmami ‚invariantná varieta' a ‚bodovo invariantná varieta'.

Cvičenie 45: Určite samodružné body a samodružné smery afinného zobrazenia:

a) $f \equiv \{x' = 2x - y + 1, y' = x + 2y + 3\}$
b) $f \equiv \{x' = 2x - 5y, y' = 2x + 3y\}$
c) $f \equiv \{x' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}, y' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}\}$
d) $f \equiv \{x' = 3x - y, y' = x + y\}$
e) $f \equiv \{x' = 3x - y + 6, y' = 3y + 4\}$
f) $f \equiv \{x' = 3x + 4y - 8, y' = x + 3y - 4\}$
g) $f \equiv \{x' = 4x + 5y - 11, y' = 2x + 4y - 7\}$
h) $f \equiv \{x' = 5x + y, y' = 4x + 8y\}$
i) $f \equiv \{x' = 2x - 2y - 2z + 1, y' = 2x + 3y - 3z, z' = y - z + 4\}$
j) $f \equiv \{x' = 4x - y - 2z, y' = 2x + y - 2z, z' = X - y + z\}$
k) $f \equiv \{x_1' = x_1 - x_2 + 2x_3 - 7, x_2' = x_2 + x_3 - 5, x_3' = x_1 - 2x_2 + x_3 + 6\}$

Cvičenie 46: Nech p je samodružná priamka zobrazenia f. Potom pre ľubovoľné $X \in p$ platí $f(X) - X = k\boldsymbol{u}$, kde $k \in R$ a $\boldsymbol{u}$ je niektorý samodružný smer zobrazenia f.

Cvičenie 47: Nech $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0$ je rovnica nadroviny v E_n, ktorá je samodružná v afinnej transformácii f s analytickým vyjadrením $\mathbb{Y} = \mathbb{B}\mathbb{X} + \mathbb{R}$. Dokážte, že koeficienty tejto nadroviny získame ako jedno z riešení sústavy rovníc

$$a_1b_{11} + a_2b_{21} + \cdots + a_nb_{n1} = \lambda a_1$$
$$\cdots$$
$$a_1b_{1n} + a_2b_{2n} + \cdots + a_nb_{nn} = \lambda a_n$$
$$a_1r_1 + a_2r_2 + \cdots + a_nr_n + a_0 = \lambda a_0,$$

kde λ je parameter.

Cvičenie 48: Určte samodružné body a priamky (a roviny, ak ide o transformáciu E_3) zobrazenia:

a) $f \equiv \{x' = -x + 4y - 2, y' = 2x - 3y + 3\}$
b) $f \equiv \{x' = 3x + y - 1, y' = 2x + 2y - 1\}$
c) $f \equiv \{x' = 7x - y - 1, y' = 4x + 2y + 4\}$
d) $f \equiv \{x' = \frac{13}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{8}{5}, y' = \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}y - \frac{4}{5}\}$
e) $f \equiv \{x' = x + 4y + z + 1, y' = 2x + 2y + z, z' = -8x - 2z - 1\}$

f) $f \equiv \{x' = 2x + y + 1, y' = 2y + z, z' = 2z + 3\}$
g) $f \equiv \{x' = 3x - 4y + 6, y' = 4x + 3y - 8, z' = -2z + 9\}$
h) $f \equiv \{x' = 2x + y - 2z + 2, y' = -y + z, z' = 2y + 2\}$
i) $f \equiv \{x' = 2y, y' = 2x, z' = z + 1\}$
j) $f \equiv \{x' = x + y, y' = y + z, z' = z + 1\}$
k) $f \equiv \{x' = 2x - 2, y' = -6x - y + 14, z' = 19x + 6y + z - 44\}$
l) $f \equiv \{x' = x - y, y' = x + y, z' = z + 2\}$
m) $f \equiv \{x' = x + z + 1, y' = 2x + 2y + z - 1, z' = -2z\}$
n) $f \equiv \{x' = x + 2y + z - 3, y' = -y + 4, z' = x + 4y + z - 2\}$
o) $f \equiv \{x' = 2x + y - z + 1, y' = -x + z - 1, z' = 2x + 2y + z + 2\}$
p) $f \equiv \{x' = 6x - 2y - 3z, y' = -2x + 3y - 6z + 6, z' = -3x - 6y - 2z + 1\}$
q) $f \equiv \{x' = -2x - 2y + 2z + 1, y' = 2x + 3y - 3z, z' = y - z + 4\}$
r) $f \equiv \{x' = 2x + 4y - 2z + 2, y' = 2x + 5y - 2z + 2, z' = -2x - 4y + 3z - 2\}$
s) $f \equiv \{x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, z' = z\}$

Cvičenie 49: Určte afinné zobrazenie, ktoré má dve priamky $a \equiv x - y = 0$ a $b \equiv 2x - y + 3 = 0$ invariantné a body $A[1, 1] \to A'[3, 3], B[0, 3] \to B'[2, 7]$

Cvičenie 50: Určte afinné zobrazenie, v ktorom sa priamky $a \equiv x + y + 1 = 0$ a $b \equiv x - y + 2 = 0$ sa zobrazia do seba a bod $[1, 1] \to [2, 1]$.

Cvičenie 51: Dané je afinné zobrazenie $x' = 10x + 11y, y' = 10x + 9y$. Nájdite vektor, ktorý sa zobrazí do vektora k nemu kolmého.

Cvičenie 52: Dané je afinné zobrazenie $x' = 2x + y - 2, y' = x - y - 1$ a bod $M = [1, 1]$. Nájdite priamku prechádzajúcu bodom M, ktorá sa zobrazí do priamky prechádzajúcej bodom M.

Cvičenie 53: Nájdite také afinné zobrazenie, ktoré zobrazí priamky $5x - 6y - 7 = 0$ a $3x - 4y = 0$ do priamok $2x + y - 4 = 0$ a $x - y + 1 = 0$ a bod $[6, 4]$ do bodu $[2, 1]$.

Cvičenie 54: Dané je afinné zobrazenie $x' = 7x + y, y' = -5x + 5y$. Nájdite také dva navzájom kolmé vektory, ktoré sa daným zobrazením zobrazia do navzájom kolmých vektorov.

Cvičenie 55: V rovine je daný trojuholník ABC a afinná transformácia tejto roviny, ktorá zobrazuje body A, B, C do bodov B, A, C. Určte samodružné smery a samodružné body tohto zobrazenia.

Cvičenie 56: Bodom $P = [-3, 5]$ veďte priamku, ktorej úsečka vyťatá priamkami $2x+3y-15 = 0$ a $4x-5y-12 = 0$ má stred v bode P.

Cvičenie 57: Nájdite afinné zobrazenie, pre ktoré je os O_x bodovo samodružná a bod $[2, 6]$ sa zobrazí na bod $[-1, 4]$. Aké bude riešenie, ak budeme požadovať, aby os O_x bola len samodružná?

Cvičenie 58: Určte afinné zobrazenie, pre ktoré

a) sú priamky $x + y + 1 = 0$ a $x - y + 2 = 0$ invariantné a bod $[1, 1]$ sa zobrazí do bodu $[2, 2]$.
b) je každý bod priamky $x + 2y - 1 = 0$ samodružný a bod $[1, 2]$ sa zobrazí do bodu $[2, 2]$.
c) sú súradnicové osi invariantnými priamkami a body $[2, 0]$, $[0, 4]$ sa zobrazia do bodov $[-6, 0]$, $[0, 8]$.

Cvičenie 59: Ak má transformácia priestoru E_2 dve rôznobežné samodružné priamky, tak ich priesečník je samodružným bodom tejto transformácie.

Cvičenie 60: Vrcholy štvorstena $ABCD$ sú v bodoch $A[0, 0, 0]$, $B[1, 0, 0]$, $C[0, 1, 0]$, $D[0, 0, 1]$. Nájdite afinné zobrazenie, ktoré zobrazí body A, B, C a D do bodov B, C, D a A v tomto poradí. Nájdite invariantné priamky a roviny tohto zobrazenia.

Cvičenie 61: Nájdite afinné zobrazenie, pre ktoré je bod $[\sqrt{2}, 0, 0]$ samodružný, vektory $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$ sú vlastnými vektormi s vlastným číslom 2 a vektor $(0, 1, 2)$ sa zobrazí na opačný vektor. Zistite samodružné smery a samodružné body tohto zobrazenia.

Cvičenie 62: Ktoré afinné transformácie euklidovskej roviny majú 3 samodružné body?

Cvičenie 63: Zovšeobecnite výsledok predchádzajúceho cvičenia!

Cvičenie 64: Ukážte, že všetky smery v E_2 sú samodružnými smermi posunutia v E_2.

Cvičenie 65: Ukážte, že všetky smery v E_2 sú samodružnými smermi rovnoľahlosti v E_2.

Cvičenie 66: Nájdite takú afinnú transformáciu roviny, ktorá

a) zobrazí priamku $5x - 6y - 7 = 0$ na priamku $2x + y - 4 = 0$ a priamku $3x - 4y = 0$ na priamku $x - y + 1 = 0$ a bod $A = [6, 4]^T$ do bodu $A' = [2, 1]^T$.
b) má invariantné priamky $a \equiv x - y = 0$ a $b \equiv 2x - y + 3 = 0$, bod $A = [1, 1]^T$ sa zobrazí do bodu $A' = [3, 3]^T$ a bod $B = [0, 3]^T$ do bodu $B' = [2, 7]^T$.
c) má invariantné priamky $a \equiv x + y - 1 = 0$ a $b \equiv x - y + 2 = 0$, bod $A = [1, 1]^T$ sa zobrazí do bodu $A' = [2, 1]^T$.

Cvičenie 67: Ak $A_0, \dots, A_k$ sú samodružné body afinnej transformácie f, potom $\langle A_0, \dots, A_k \rangle$ je bodovo samodružná variéta v zobrazení f.
Cvičenie 68: Dokážte tvrdenie: Ak má afinná transformácia f priestoru E_n samodružný bod P a vektor $\boldsymbol{p}$ je samodružným smerov tejto transformácie, tak priamka $X = P + t\boldsymbol{p}$ je samodružnou priamkou transformácie f. Kedy je táto priamka bodovo samodružná?
Cvičenie 69: Nech $A_0, \dots, A_k$ sú samodružné body afinnej transformácie f a $\boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_l}$ sú samodružné smery zobrazenia f. Potom $\langle A_0, \dots, A_k, \boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_l} \rangle$ je samodružnou variétou zobrazenia f.

Kapitola 6
Niektoré podgrupy grupy $GA(E_n)$

Definícia 13 (Dilatácia): Nech f je afinita priestoru E_n. Nazveme ju dilatáciou, ak každý smer v E_n je samodružným smerom f.

Pre dilatácie platí, že pre ľubovoľné $\boldsymbol{u} \in V_n$ existuje také $c \in R$, že $f^*(\boldsymbol{u}) = c\boldsymbol{u}$.

Veta 15 (Existencia koeficientu dilatácie): Nech $f : E_n \to E_n$ je dilatácia. Potom existuje také $0 \neq c \in R$, že pre ľubovoľný vektor $\boldsymbol{u} \in V_n$ platí $f^*(\boldsymbol{u}) = c\boldsymbol{u}$.
Dôkaz: Veta vraví, že koeficient c je konštantný pre všetky vektory, pretože ak platí $f^*(\boldsymbol{u}) = c_u f^*(\boldsymbol{u})$, $f^*(\boldsymbol{v}) = c_v f^*(\boldsymbol{v})$, $f^*(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = cf^*(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$ pre lineárne nezávislé vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, potom

$$c_u\boldsymbol{u} + c_v\boldsymbol{v} = f^*(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v},$$

čo môže byť pravda len v prípade, že $c = 0$ alebo $c = c_u = c_v$. Prvý prípad však nemôže nastať, pretože f je afinita. (Rozmyslite si podrobne prečo!)

Ak sú vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ lineárne závislé, tak povedzme $\boldsymbol{u} = d\boldsymbol{v}$. Potom však $c_u\boldsymbol{u} = f^*(\boldsymbol{u}) = df^*(\boldsymbol{v}) = dc_v\boldsymbol{v} = c_v\boldsymbol{u}$. Rovnosť platí ak buď vektor $\boldsymbol{u} = \mathbf{o}$ alebo $c_u = c_v$. Prvý prípad opäť nemôže nastať, lebo pretože smer definuje vždy len nenulový vektor.

Číslo c je nenulové, pretože f je bijektívne. □

Definícia 14 (Koeficient dilatácie): Nech $f : E_n \to E_n$ je dilatácia. Číslo c také, že $f^*(\boldsymbol{u}) = c\boldsymbol{u}$ pre ľubovoľné $\boldsymbol{u} \in V_n, \boldsymbol{u} \neq \mathbf{o}$ nazývame koeficientom dilatácie f.

Veta 16 (Klasifikácia dilatácií): Nech $f : E_n \to E_n$ je dilatácia a c jej koeficient. Potom

i) ak $c = 1$, tak f je posunutie priestoru E_n
ii) ak $c \neq 1$, tak f má samodružný bod S a je rovnoľahlosť s koeficientom c a stredom S

Dôkaz: $\boxed{c = 1}$ Podľa predpokladov $f(X) - f(Y) = f(X - Y) = X - Y$. Teda $f(X) - X = f(Y) - Y$ pre ľubovoľne zvolené $X, Y \in E_n$. To ale znamená, že sa jedná o posunutie o vektor $\boldsymbol{u} = f(X) - X$. Teda $f(X) = X + \boldsymbol{u}$.
$\boxed{c \neq 1}$ V tomto prípade ukážeme, že existuje samodružný bod. Platí $f(X - Y) = c(X - Y)$, čo možno prepísať do tvaru a následne upraviť

$$\frac{c}{c-1}(X - Y) = \frac{1}{c-1}(f(X) - f(Y))$$
$$\frac{c}{c-1}X - \frac{1}{c-1}f(X) = \frac{c}{c-1}Y - \frac{1}{c-1}f(Y)$$

Položme $S = \frac{c}{c-1}X - \frac{1}{c-1}f(X)$. Potom však musí platiť $f(S) = S$. (Presvedčte sa o tom výpočtom!) Teda bod S je samodružný. O zobrazení f potom môžme písať

$$f(X) - S = f(X) - f(S) = f(X - S) = c(X - S)$$
$$f(X) = S + c(X - S)$$

To ale znamená, že toto je rovnoľahlosť so stredom S a koeficientom c. □

Celkovo z predchádzajúcej vety možno vyťažiť omnoho viac, ako tvrdí predchádzajúca veta. Dá sa vidieť celá štruktúra množiny dilatácií.

Veta 17 (Grupa dilatácií): Množina všetkých dilatácií priestoru E_n spolu s operáciou skladania zobrazení tvoria grupu. Označujeme ju $GD(E_n)$.
Dôkaz: Treba overiť, či sú splnené axiómy grupy. Ak f, g sú dve dilatácie s koeficientami c, d, tak $g \circ f$ je určite dilatácia s koeficientom cd. Identitu môžme považovať za dilatáciu s koeficientom 1. Ešte treba ukázať, že ku

každej dilatácii existuje inverzná dilatácia. Pre posunutie o vektor $\boldsymbol{u}$ je inverznou dilatáciou posunutie o vektor $-\boldsymbol{u}$. Pre dilatáciu s koeficientom $c \neq 1$ (a stredom S) to bude rovnoľahlosť so stredom S a koeficientom $\frac{1}{c}$. □

Dôsledok 4 (Skladanie dilatácií): V $GD(E_n)$ platia tvrdenia

i) zložením dvoch posunutí dostaneme posunutie
ii) zložením posunutia a rovnoľahlosti dostaneme rovnoľahlosť
iii) zložením dvoch rovnoľahlostí dostaneme buď posunutie alebo rovnoľahlosť.

Dôkaz: Tvrdenia sú zrejmé zo štruktúry grupy $GD(E_n)$. V prípade ii), ak $\boldsymbol{u}$ je vektor posunutia, S je stred rovnoľahlosti a c je koeficient rovnoľahlosti, tak zložením dostaneme rovnoľahlosť so stredom $S - \frac{1}{c-1}\boldsymbol{u}$ a koeficientom c.

Ak v prípade iii) vstupujú do hry rovnoľahlosť so stredom S a koeficientom c a rovnoľahlosť so stredom T a koeficientom d, tak v závislosti od súčinu cd dostávame buď posunutie o vektor $(d-1)(S-T)$, ak $cd = 1$ alebo rovnoľahlosť so stredom $\frac{(c-1)d}{cd-1}S + \frac{d-1}{cd-1}T$ a koeficientom cd, ak $cd \neq 1$. □

Dôsledok 5 (Grupa posunutí): Množina všetkých posunutí spolu s operáciou skladania tvorí grupu. Označujeme ju $GT(E_n)$. Naviac platí, že $GT(E_n)$ je podgrupou $GD(E_n)$.
Dôkaz: Vyplýva z predchádzajúcich úvah. □

Veta 18 (Analytické vyjadrenie dilatácie): Analytické vyjadrenie dilatácie. $f : E_n \to E_n$ s koeficientom c v repéri $\langle O, \boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}\rangle$ je

$$\mathbb{Y} = c\mathbb{I}\mathbb{X} + \mathbb{R}$$

Dôkaz: . Keďže platí podľa definície dilatácie platí

$$\begin{aligned} f(O) &= [r_1, \ldots, r_n]^T \\ f(\boldsymbol{e_1}) &= c\boldsymbol{e_1} = (c, \ldots, 0)^T \\ &\vdots \\ f(\boldsymbol{e_n}) &= c\boldsymbol{e_n} = (0, \ldots, c)^T \end{aligned}$$

výsledok je zrejmý. □

Cvičenie 70: Overte podrobne výpočty v dôkaze dôsledku 4. Je skladanie dilatácií komutatívna grupa?
Cvičenie 71: Napíšte rovnice translácie, ak bod $A = [1,1]^T \mapsto [2,0]^T$ a koeficient $k = -2$.
Cvičenie 72: Napíšte rovnice rovnoľahlosti, ak poznáte stred $O = [0,0,0]^T$ a koeficient $k = -2$.
Cvičenie 73: Určte rovnice rovnoľahlosti f a súradnice jej stredu, ak $B = f(A)$ a k je jej koeficient

a) $A = [1,1]^T, B = [3,2]^T, k = -2$
b) $A = [2,0,1]^T, B = [0,1,3]^T, k = -2$

Cvičenie 74: Nájdite rovnice súčinu dilatácií (uvažujte oba prípady):

a) $O_1 = O_2 = [2,2]^T, k_1 = 2, k_2 = 3$
b) $O_1[0,0]^T, O_2[1,0]^T, k_1 = 2, k_2 = \frac{1}{2}$
c) $O[1,1], k = 2$, posunutie o vektor $(1,3)^T$

Cvičenie 75: Zistite, či existuje rovnoľahlosť, ktorá zobrazuje body $A = [1,3]$, $B = [3,2]$ do bodov $A' = [1,5]$, $B' = [\frac{13}{3}, \frac{10}{3}]$. Ak áno, nájdite stred a koeficient tejto rovnoľahlosti.
Cvičenie 76: Bodom $P = [-3,-5]^T$ veďte priamku, ktorej úsečka medzi priamkami $a \equiv 2x + 3y - 15 = 0$ a $b \equiv 4x - 5y - 12 = 0$ má v bode P svoj stred.
Cvičenie 77: Napíšte rovnice afinného zobrazenia a zistite o aké zobrazenie ide, pričom bod $A = [2,2,=1]^T$ je samodružný asociované zobrazenie zobrazuje vektory $(1,1,1)^T \mapsto (2,2,2)^T$, $(0,0,-1) \mapsto (0,0,-2)$ a $(1,3,5) \mapsto (2,6,10)^T$.

Definícia 15 (Základná afinita): Nech $f : E_n \to E_n$ je afinná transformácia. Ak má zobrazenie f aspoň jednu nadrovinu bodovo samodružnú, tak zobrazenie nazývame základnou afinitou priestoru E_n.

Veta 19 (Vyjadrenie základnej afinity): Nech $\alpha \subset E_n$ je nadrovina a $A_0, B_0 \in E_n$ sú body nepatriace nadrovine α. Potom existuje jediná nadrovinová afinita f taká, že α je bodovo invariantná a $f(A_0) = B_0$. Naviac, ak $g(X) = 0$ je všeobecná rovnica nadroviny α, tak

$$f(X) = X + \frac{g(X)}{g(A_0)}(B_0 - A_0) \tag{3}$$

Dôkaz: Nech $A_1, \dots, A_n$ sú afinne nezávislé body v α. Potom $A_0, \dots, A_n$ je afinne nezávislá množina v E_n. Položme $f(A_0) = B_0$, $f(A_1) = A_1, \dots, f(A_n) = A_n$. Takto definované zobrazenie je podľa vety 8 na strane 7 vyjadrené jednoznačne a nadrovina α je bodovo invariantná, teda ide o základnú afinitu. Naviac $f(A_0) = B_0$. Teda platí prvá časť vety.

Definujme zobrazenie $h(X) = X + \frac{g(X)}{g(A_0)}(B_0 - A_0)$. Platí

$$h(A_0) = A_0 + \frac{g(A_0)}{g(A_0)}(B_0 - A_0) = B_0 = f(A_0)$$

$$h(A_i) = A_i + \frac{g(A_i)}{g(A_0)}(B_0 - A_0) = A_i = f(A_i) \quad \text{pre } i = 1, \dots, n,$$

pretože $g(A_i) = 0$ pre $i = 1, \dots, n$. Teda $f = h$. □

Dôsledok 6 : Nech $X, Y \in E_n$. Potom sú vektory $f(X) - X$ a $f(Y) - Y$ lineárne závislé.
Dôkaz: Stačí si uvedomiť, že tieto vektory sú násobkom vektora $B_0 - A_0$. □

Definícia 16 (Smer základnej afinity): Nech f je základná afinita, potom $f(X) - X$ sa nazýva smerom základnej afinity f.

Veta 20 (O vyjadrení základnej afinity): Nech f je základná afinita priestoru E_n so samodružnou nadrovinou α a smerom $s_f \notin V_\alpha$. Označme X^* bod prieniku nadroviny α a priamky $Xf(X)$. Potom deliaci pomer bodov $(f(X)XX^*) = \frac{g(f(X))}{g(X)}$ je konštantný.
Dôkaz: Nech $g(X) = 0$ je všeobecná rovnica nadroviny α. Nech priamka $Xf(X)$ má parametrické vyjadrenie $Y = X + t(f(X) - X)$. Potom bod $X^* = X + t^*(f(X) - X)$ a $g(X^*) = 0$, teda (vzhľadom na afinnosť g) možno písať, že

$$g(X) + t^* \frac{g(X)}{g(A_0)}(g(B_0) - g(A_0)) = 0$$

$$t^* = \frac{g(A_0)}{g(A_0) - g(B_0)},$$

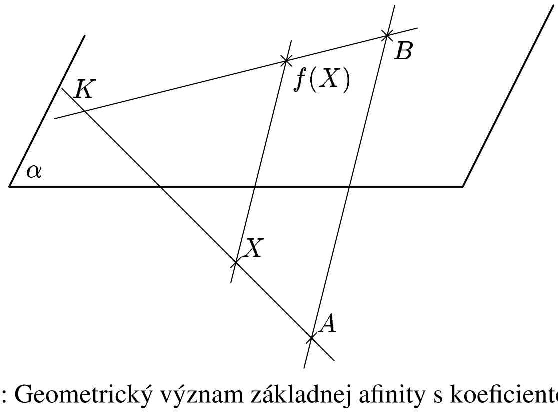
teda

$$X^* = X + \frac{g(A_0)}{g(A_0) - g(B_0)}(f(X) - X)$$

$$X^* = \frac{-g(B_0)}{g(A_0) - g(B_0)}X + \frac{g(A_0)}{g(A_0) - g(B_0)}f(X), (4)$$

čo podľa vety 4 na strane 4 znamená, že $(f(X)XX^*) = \frac{g(B_0)}{g(A_0)}$. Ak zobrazíme rovnosť (4) zobrazením g, dostávame priamo, že

$$(f(X)XX^*) = \frac{g(f(X))}{g(X)}.$$



Obrázok 8: Geometrický význam základnej afinity s koeficientom $k_f \neq 1$.

□

Dôsledok 7 : Ak $f(X) - X \in V_\alpha$, tak $\frac{g(f(X))}{g(X)} = 1$.

Dôkaz: Ak $f(X) - X \in V_\alpha$, tak $g(f(X)) - g(X) = 0$, a teda $\frac{g(f(X))}{g(X)} = 1$. $\square$

Definícia 17 (Koeficient základnej afinity): Nech f je základná afinita priestoru E_n so samodružnou nadrovinou $\alpha : g(X) = 0$. Číslo $\frac{g(f(X))}{g(X)}$ nazývame koeficientom základnej afinity f. Označujeme ho k_f.
Dôsledok 8 : Nech f je základná afinita priestoru E_n s bodovo samodružnou nadrovinou $\alpha : g(X) = 0$, s koeficientom $k_f \neq 1$ a smerom $\boldsymbol{s}_f$. Potom

$$f(X) = X + k_f - 1\frac{g(X)}{g^*(\boldsymbol{s}_f)}\boldsymbol{s}_f. \tag{5}$$

Dôkaz: Podľa vety 19 na strane 17 potrebujeme poznať obraz nejakého bodu mimo roviny α. Nech A je taký, že $f(A) - A = \boldsymbol{s}_f$. Nech A^* je prienik priamky $Af(A)$ s rovinou α. Potom $A^* = A + t^*\boldsymbol{s}_f$, teda $t^* = \frac{-g(A)}{g^*(\boldsymbol{s}_f)}$. Na druhej strane $(f(A)AA^*) = k_f$, čo znamená, že

$$k_f(A^* - A) = (A^* - f(A))$$
$$k_f t^* \boldsymbol{s}_f = t^*\boldsymbol{s}_f - \boldsymbol{s}_f.$$

Keďže vektor $\boldsymbol{s}_f$ je nenulový, tak

$$k_f t^* = t^* - 1,$$

čo znamená

$$t^* = \frac{1}{1 - k_f}.$$

Potom

$$\frac{1}{g(A)} = (k_f - 1)\frac{1}{g^*(\boldsymbol{s}_f)}$$

Dosadením do vyjadrenia (3) na strane 17 dostávame výsledok. $\square$

Cvičenie 78: Napíšte rovnice základnej afinity, ak sú dané
a) os $o \equiv y = 0$ a bod $[0, 1]^T \mapsto [3, 5]^T$.
b) os $o \equiv 2x + y - 1 = 0$ a bod $[1, 0]^T \mapsto [2, 1]^T$.
Cvičenie 79: Určte rovice základnej afinity v E^3, ak rovina samodružných bodov
a) $\rho \equiv x + 2y - z + 1 = 0$ a bod $A = [0, 0, 0] \to f(A) = [0, 0, 2]$
b) $\rho \equiv x + 2y - z + 1 = 0$ a bod $A' = [1, 0, 1] \to f(A') = [0, 2, 2]$
Cvičenie 80: Zistite, či zobrazenie f je základná afinita. Ak áno, určte jej smer a koeficient:
a) $f \equiv \{x' = 3x - 2y + 2, y' = x + 1\}$
b) $f \equiv \{x' = -y + 1, y' = x + 2y - 1\}$
c) $f \equiv \{x' = 2x + y - 1, y' = -2x - y + 2\}$
Cvičenie 81: Do čoho sa zobrazí priamka $p \equiv \{x = 1 + 2t, y = 1 + 2t, z = 1 - t\}$ v súmernosti podľa roviny, v ktorej sa $A = [0, 0, 0] \to f(A) = [2, 2, 8]$
Cvičenie 82: Nájdite osovú afinitu s osou $2x + y - 2 = 0$, koeficientom $k = 3$ a smerom $\boldsymbol{s} = (2, 1)^T$.
Cvičenie 83: Nájdite afinné zobrazenie, ktoré je súčinom osovej afinity a_1 s osou $x + y - 2 = 0$, koeficientom $k_1 = \frac{1}{2}$ a smerom $\boldsymbol{s_1} = (1, 1)^T$ a osovej afinity a_2 s osou $x - y = 0$, koeficientom $k_2 = 2$ a smerom $\boldsymbol{s_2} = (1, -1)^T$.
Cvičenie 84: Nájdite afinitu, ktorej rovnica samodružných bodov má rovnicu $2x + 2y + z - 2 = 0$, koeficientom $k = \frac{1}{2}$ a smerom $\boldsymbol{s} = (2, -2, 1)^T$.
Cvičenie 85: Určte osovú afinitu, ktorá
a) má os $x + 2y - z + 1 = 0$ a bod $[0, 0, 0]$ sa zobrazí do bodu $[0, 0, 2]$
b) má os $x + y - z = 0$ a bod $[1, 0, 2]$ sa zobrazí do bodu $[2, 0, 1]$

Veta 21 (O rozklade afinnej transformácie): Nech $f : E_n \to E_n$ je afinná transformácia. Potom f možno napísať ako súčin nanajvýš $n + 1$ základných afinít.
Dôkaz: Nech $A_0, \dots, A_n$ sú afinne nezávislé body priestoru E_n a nech $B_i = f(A_i)$ pre $i = 0, \dots, n$. Body B_i $i = 0, \dots, n$ sú tiež afinne nezávislé. Zostrojíme postupnosť afinít $f_0, \dots, f_n$, ktorých zložením dostaneme zobrazenie f.

Nech $\alpha_0 \in E_n$ je nadrovina neobsahujúca žiaden z bodov A_0, B_0. Zostrojme nadrovinovú afinitu f_0 so samodružnou nadrovinou α_0 a takú, že $f_0(A_0) = B_0$. Nech zobrazenie $f_0(A_i) = B_i^0$ pre $i = 1, \dots, n$.

Zostrojme teraz afinitu f_1. Nech α_1 je nadrovina obsahujúca bod B_0 a neobsahujúca žiaden z bodov B_1 a B_1^0. Existencia takejto roviny vyplýva z faktu, že body $B_0, B_1^0, \dots, B_n^0$ sú lineárne nezávislé. Samodružnou nadrovinou afinity f_1 bude nadrovina α_1 a $f(B_1^0) = B_1$. Označme body $f_1(B_i^0) =: B_i^1$ pre $i = 2, \dots, n$.

Teraz budeme pokračovať indukciou. Predpokladajme, že máme zostrojené afinity $f_0, \ldots, f_{j-1}$, kde $0 < j \leq n$. Zostrojme teraz afinitu f_j. Samodružnou nadrovinou afinity f_j bude taká nadrovina α_j, ktorá bude obsahovať body $B_0, \ldots, B_{j-1}$ a nebude obsahovať žiaden z bodov B_j^{j-1} alebo B_j (taká existuje, pretože body $B_0, \ldots, B_{j-1}, B_j^{j-1}, \ldots, B_n^{j-1}$, pričom $f(B_j^{j-1}) = B_j$. Označme ešte $f(B_i^{j-1}) =: B_i^j$ pre $i = j+1, \ldots, n$.

Tvrdíme, že $f(X) = f_n f_{n-1} \ldots f_0(X)$. Stačí ukázať, že sa tieto dve zobrazenia zhodujú na množine $n+1$ afinne nezávislých bodov v E_n. Vyberme si $A_0, \ldots, A_n$.

$\boxed{i=0}$ $f(A_0) = B_0$, $f_n f_{n-1} \ldots f_0(A_0) = f_n f_{n-1} \ldots f_1(B_0) = \ldots = f_n f_{n-1} \ldots f_i(X) = \ldots = B_0$, pretože aspoň jedna bodovo samodružná nadrovina zobrazenia f_i pre $i = 1, \ldots, n$ obsahuje bod B_0.

$\boxed{i=1}$ $f(A_1) = B_1$, $f_n f_{n-1} \ldots f_0(A_1) = f_n f_{n-1} \ldots f_1(B_1^0) = f_n f_{n-1} \ldots f_2(B_1) = \ldots = B_1$, pretože aspoň jedna bodovo samodružná nadrovina zobrazenia f_i pre $i = 2, \ldots, n$ obsahuje bod B_1.

Ďalej pokračujeme matematickou indukciou podľa i. Tým je dôkaz ukončený. $\square$

Poznámka 10: Predchádzajúca veta nám hovorí, že grupa $GA(E_n)$ je generovaná všetkými možnými základnými afinitami tohoto priestoru.

Príklad 8: Rozložte afinnú transformáciu $f \equiv \{x' = 2x + y - 1, y' = x + 2y + 2\}$ priestoru E_2 na základné afinity.

Riešenie: Dôkaz vo vete 21 na strane 19 je konštrukčný, budeme postupovať podľa neho. Zvoľme si afinne nezávislú množinu bodov $A_0 = [0,0]^T$, $A_1 = [1,-2]^T$, $A_3 = [-2,1]^T$. Potom $B_0 = f(A_0) = [-1,2]^T$, $B_1 = f(A_1) = [-1,-1]^T$, $B_2 = f(A_2) = [-4,2]^T$. Teraz budeme konštruovať tri osové afinity.

$\boxed{f_0}$ bude osová afinita s osou $\alpha_0 : y - 1 = 0$. Je to priamka neobsahujúca ani bod A_0 ani bod B_0. Príslušná osová afinita sa dá analyticky vyjadriť ako

$$f_0(X) = X + \frac{y-1}{-1}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},$$

teda $f_0(A_0) = B_0$, $f_0(A_1) = [-2,4]^T =: B_1^0$ a $f_0(A_2) = [-2,1]^T =: B_2^0$.

$\boxed{f_1}$ bude osová afinita s osou $\alpha_1 : y - 2 = 0$. Je to priamka obsahujúca bod B_0 a neobsahujúca ani bod B_1^0 ani bod B_1. Príslušná osová afinita sa dá analyticky vyjadriť ako

$$f_0(X) = X + \frac{y-2}{2}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix},$$

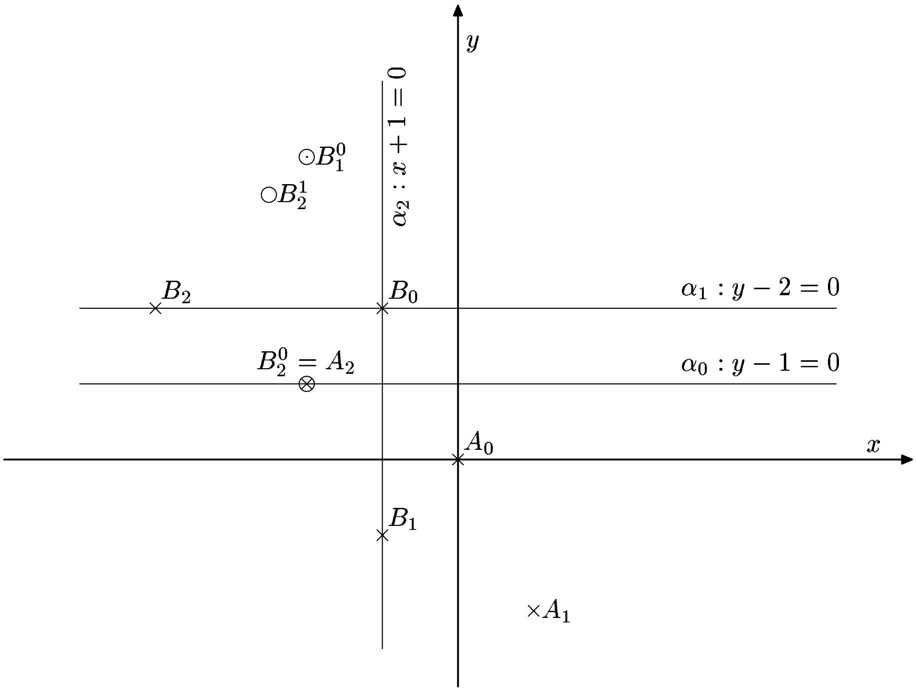
teda $f_1(B_0) = B_0$, $f_1(B_1^0) = B_1$ a $f_1(B_2^0) = [-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]^T =: B_2^1$.

$\boxed{f_2}$ bude posledná osová afinita s osou $\alpha_2 : x + 1 = 0$. Je to priamka prechádzajúca bodmi B_0 a B_1 a neobsahujúca ani bod B_1^2 ani bod B_2. Príslušná osová afinita sa dá analyticky vyjadriť po úprave ako

$$f_2(X) = X + (x+1)\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix},$$

teda $f_2(B_0) = B_0$, $f_2(B_1 = B_1$ a $f_2(B_1^2) = B_2$.

Overte si zložením týchto troch zobrazení, že sme počítali správne.



Obrázok 9: Rozklad afinnej transformácie.

□

Definícia 18 (Ekviafinná transformácia): Afinná transformácia priestoru E_n sa nazýva ekviafinná, ak jej analytické vyjadrenie v nejakej karteziánskej sústave súradníc je $\mathbb{Y} = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{R}$ a $\det \mathbb{A} = 1$.
Poznámka 11: Ekviafinné zobrazenia zachovávajú mieru (objem) zobrazovanej množiny.

Veta 22 (Grupa ekviafinných transformácií): Všetky akviafinné transformácie spolu s operáciou skladania tvoria grupu. Označujeme je $GE(E_n)$.
Dôkaz: Pokúste sa dokázať si to ako cvičenie. □

Cvičenie 86: Daná je afinita f. Rozložte ju na súčin základných afinít !
a) $f \equiv \{x' = 2x - y + 1, y' = x + y + 3\}$
b) $f \equiv \{x_1' = x_1 + x_2 + 2x_3 + 1, x_2' = 2x_1 - x_2 + 3, x_3 = x_2 + x_3 - 2\}$
c) $f \equiv \{x_1' = x_1 + x_2, x_2' = x_1 + x_2 + x_3, x_3 = x_2 + x_3 + 2\}$
Cvičenie 87: Rozložte na základné afinity afinitu, ktorá zobrazuje $A = [0,0]^T \to f(A) = [1,1]^T$, $B = [1,0]^T \to f(B) = [1,-1]^T$, $C = [0,1]^T \to f(C) = [-1,-2]^T$.
Cvičenie 88: Dané sú tri priamky a, b, c. Určte štvorec $ABCD$ tak, aby $A \in a$, $C \in c$, $B, D \in b$, pričom $a \equiv 2x + y + 1 = 0$, $b \equiv 2x + y - 3 = 0$ a $c \equiv x - y = 0$.
Cvičenie 89: Dané sú tri priamky a, b, c. Určte priamku p tak, aby $p \perp a$, $p \cap b = B$, $p \cap c = C$ a úsečka $BC \subset a$, pričom $a \equiv x - y = 0$, $b \equiv y - 2 = 0$ a $c \equiv 2x - 3y + 6 = 0$.

Kapitola 7
Zhodné zobrazenia

Definícia 19 (Zhodné zobrazenie): Zobrazenie $f : E_n \to E_m$ sa nazýva zhodné (izometrické), ak pre ľubovoľné body $X, Y \in E_n$ platí $\|f(X) - f(Y)\| = \|X - Y\|$, kde $\|.\|$ označuje normu indukovanú skalárnym súčinom $\langle ., . \rangle$ v príslušnom Euklidovskom priestore. Ak f je naviac transformácia, tak sa nazýva zhodnou transformáciou. Ak f je aj afinitou, tak f nazývame zhodnosťou.
Poznámka 12: Z definície ihneď vidno niekoľko vlastností zhodných zobrazení. Keďže $X \neq Y$, musí aj $f(X) \neq f(Y)$. Teda zhodné zobrazenie je prosté, čo znamená, $n \leq m$.

Veta 23 (Afinnosť zhodného zobrazenia): Každé zhodné zobrazenie $f : E_n \to E_m$ je afinné.
Dôkaz: Nech $C = (1-t)A + tB$, pričom $C \neq B$. Potom platí $\|A - B\| = \|f(A) - f(B)\|$, $\|A - C\| = \|f(A) - f(C)\|$ a $\|C - B\| = \|f(C) - f(B)\|$. Keďže body A, B, C sú kolineárne, tak platí $(C - A) = (ABC)(C - B)$ a niektorá

z rovností (pozri obr. 2 na strane 4)

$$\begin{aligned} \|B-C\| + \|C-A\| &= \|B-A\|, && \text{ak } (ABC) < 0 \\ \|B-A\| + \|A-C\| &= \|B-C\|, && \text{ak } 0 < (ABC) < 1 \\ \|A-B\| + \|B-C\| &= \|A-C\|, && \text{ak } 1 < (ABC). \end{aligned}$$

Nech platí napríklad prvá z nich (ostatné prípady sa dokážu analogicky). Potom zo zhodnosti f možno písať, že

$$\|f(B)-f(C)\| + \|f(C)-f(A)\| = \|f(B)-f(A)\|,$$

čo podľa trojuholníkovej nerovnosti znamená, že body $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ sú kolineárne, $f(C) \neq f(B)$, teda možno počítať deliaci pomer $(f(A)f(B)f(C)) < 0$. Keďže $f(C)-f(A) = (f(A)f(B)f(C))(f(C)-f(B))$, tak $\|f(C)-f(A)\| = |(f(A)f(B)f(C))|\|(f(C)-f(B))\|$. Podobne $\|(C-A)\| = |(ABC)|\|(C-B)\|$. Teda $|(ABC)| = |(f(A)f(B)f(C))|$, čo pri obmedzeniach na hodnotu deliaceho pomeru (oba sú záporné) znamená ich rovnosť. Teda $(ABC) = (f(A)f(B)f(C))$. □

Príklad 9: Nech $f \equiv \left\{x_1' = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + 1, x_2' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + 1\right\}$. Zistite, či f je zhodné zobrazenie.
Riešenie: Nech $X = [x_1, x_2]^T$ a $Y = [y_1, y_2]^T$. Potom podľa definície platí

$$\begin{aligned} \|f(X)-f(Y)\|^2 =& (x_1'-y_1')^2 + (x_2'-y_2')^2 = (x_1-y_1)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2(x_1-y_1)(x_2-y_2)\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \\ & + (x_2-y_2)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (x_1-y_1)^2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2(x_1-y_1)(x_2-y_2)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + \\ & + (x_2-y_2)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \\ =& (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 = \|X-Y\|^2. \end{aligned}$$

Teda f je zhodné zobrazenie, kedže hodnoty $\|.\|$ sú nezáporné. □

Veta 24 (Zachovávanie skalárneho súčinu): Nech $f : E_n \to E_n$ je zhodné zobrazenie. Potom f^* zachováva skalárny súčin (t.j. $\langle f^*(\boldsymbol{u}), f^*(\boldsymbol{v})\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$ pre ľubovoľné vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V_n$)
Dôkaz: Z definície zhodného zobrazenia vyplýva, že $\langle f^*(\boldsymbol{u}), f^*(\boldsymbol{u})\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle$. Naviac platí, že

$$\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle,$$

teda

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle &= \frac{1}{2}\Big(\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle\Big) = \\ &= \frac{1}{2}\Big(\langle f^*(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}), f^*(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\rangle - \langle f^*(\boldsymbol{u}), f^*(\boldsymbol{u})\rangle - \langle f^*(\boldsymbol{v}), f^*(\boldsymbol{v})\rangle\Big) = \langle f^*(\boldsymbol{u}), f^*(\boldsymbol{v})\rangle. \end{aligned}$$

□

Poznámka 13: Zachovávanie skalárneho súčinu má geometrický význam. Keďže uhly aj všetky metrické vlastnosti sú odvodené od skalárneho súčinu, možno tvrdiť, že zhodné zobrazenia všetky tieto aspekty geometrického objektu zachovávajú. Hovoríme, že zobrazenie je ekviformné a izometrické.
Dôsledok 9 : Obrazom karteziánskej sústavy súradníc v zhodnej transformácii $f : E_n \to E_n$ je karteziánska sústava súradníc.
Dôkaz: Nech $\langle O, \boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\rangle$ je karteziánska sústava súradníc v E_n. Potom $\langle f(O), f^*(\boldsymbol{e_1}), \dots, f^*(\boldsymbol{e_n})\rangle$ je jej obraz. Kedže platí, že $\delta_{i,j} = \langle \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j}\rangle = \langle f(\boldsymbol{e_i}), f(\boldsymbol{e_j})\rangle$, tak aj výsledná súradnicová sústava je karteziánska. □

Predchádzajúci dôsledok sa dá zovšeobecniť.

Veta 25 : Nech $\langle O, \boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\rangle$ je repér v E_n a nech $P \in E_m$, $\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_n} \in V_m$, pričom $\|\boldsymbol{e_i} + \boldsymbol{e_j}\| = \|\boldsymbol{f_i} + \boldsymbol{f_j}\|$ pre všetky $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Potom existuje jediné zhodné zobrazenie $f : E_n \to E_m$, že $f(O) = P$ a $f^*(\boldsymbol{e_i}) = \boldsymbol{f_i}$ pre $i = 1, \dots, n$.

Dôkaz: Podľa dôsledku 2 na strane 7 existuje jediné afinné zobrazenie s vlastnosťami požadovanými tvrdením vety. Zostáva nám ukázať, že je zhodné. Nech $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V_n$ a nech $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{e_i}$, $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} d_i \boldsymbol{e_i}$. Potom možno písať

$$\langle f^*(\boldsymbol{u}), f^*(\boldsymbol{v}) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i f^*(\boldsymbol{e_i}), \sum_{i=1}^{n} d_i f^*(\boldsymbol{e_i}) \right\rangle = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} c_i d_j \langle f^*(\boldsymbol{e_i}), f^*(\boldsymbol{e_j}) \rangle =$$
$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} c_i d_j \langle \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle .$$

špeciálne, ak $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$, dostávame, že zobrazenie f je zhodné. □

Veta 26 (Charakterizácia zhodných transformácií): Nech $f : E_n \to E_n$ je transformácia. Potom sú ekvivalentné podmienky:

a) f je zhodné
b) f^* je ortogonálne
c) $\mathbb{A}^T \mathbb{A} = \mathbb{I}$, kde $\mathbb{A}$ je matica zobrazenia f^* v nejakej karteziánskej sústave súradníc.

Dôkaz: Nech $f(\mathbb{X}) = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{B}$

a)⇔ c) f je zhodné práve vtedy, keď pre ľubovoľné $X, Y \in E_n$ platí $\|f(X) - f(Y)\| = \|X - Y\|$. Môžeme písať $\|f(X) - f(Y)\| = \|\mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{B} - (\mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{B})\| = \|\mathbb{A}(\mathbb{X} - \mathbb{Y})\|$ a následne, ak využijeme fakt, že štandardná norma v E_n je odvodená zo skalárneho súčinu $\langle ., . \rangle$ v E_n

$$\langle (X - Y), (X - Y) \rangle = \langle (f(X) - f(Y)), (f(X) - f(Y)) \rangle = \langle \mathbb{A}(X - Y), \mathbb{A}(X - Y) \rangle =$$
$$= \langle (X - Y), \mathbb{A}^T \mathbb{A}(X - Y) \rangle,$$

a to platí pre ľubovoľné $X, Y \in E_n$ práve vtedy, keď $\mathbb{A}^T \mathbb{A} = I$

b)⇔ c) Ekvivalencia tohto typu je známa z lineárnej algebry. □

Veta 27 (Analytické vyjadrenie zhodného zobrazenia): Nech je zobrazenie $f : E_n \to E_m$ zhodné. Zvoľme v E_n repér $\langle O, \boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n} \rangle$ a v E_m repér $\langle P, \boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_m} \rangle$. Nech $f(O) = [p_1, \dots, p_n]^T$, $f^*(\boldsymbol{e_i}) = (a_{1i}, \dots, a_{mi})^T$ pre $i = 1, \dots, n$. Ak $X = [x_1, \dots, x_n]^T$ a $f(X) = [y_1, \dots, y_m]^T$, tak

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} .$$

Naviac platí, že

$$\mathbb{A}^T \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Dôkaz: Tvrdenie vyplýva priamo z analytického tvaru afinného zobrazenia a z vety 26. □

Dôsledok 10 (Vlastné hodnoty zhodného zobrazenia): Asociované zobrazenie zhodnosti f môže nadobudnúť reálne vlastné hodnoty ± 1.

Dôkaz: Ak $\boldsymbol{u}$ je vlastný vektor, tak $\|f^*(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|$, teda môže platiť iba $f^*(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ alebo $f^*(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{u}$. (Premyslite si, prečo nemôže mať zhodnosť nulový vlastný vektor!) □

Dôsledok 11 : Ak $\boldsymbol{f_i} = f^*(\boldsymbol{e_i})$ pre $i = 1, \dots, n$, tak zobrazenie f má v takýchto súradnicových sústavách analytické vyjadrenie

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + r_1 \\ &\dots \\ y_n &= x_n + r_n \\ y_{n+1} &= 0 + r_{n+1} \\ &\dots \\ y_m &= 0 + r_m \end{aligned}$$

Dôkaz: Vyplýva priamo z predošlej vety. □

Veta 28 (Grupa zhodných transformácií): Množina všetkých zhodných transformácií priestoru E_n spolu s operáciou skladania zobrazení tvorí grupu. Označujeme ju $Z(E_n)$.
Dôkaz: Nech $f, g : E_n \to E_n$ sú zhodné zobrazenia. Je jasné, že aj zložené zobrazenie je zhodné, lebo

$$\|f \circ g(X) - f \circ g(Y)\| = \|g(X) - g(Y)\| = \|X - Y\|.$$

Identické zobrazenie priestoru E_n je zhodné zobrazenie, teda v množine všetkých zhodností existuje jednotkový prvok. Naviac inverzné zobrazenie k zobrazeniu f je afinné zobrazenie, stačí ukázať, že je zhodné. Ale

$$\|f(X) - f(Y)\| = \|X - Y\| = \|f^{-1} \circ f(X) - f^{-1} \circ f(Y)\| = \|f^{-1}(f(X)) - f^{-1}(f(Y))\|,$$

a kedže f je bijektívne, $f(X) - f(Y)$ nadobúda všetky hodnoty. □

Dôsledok 12 (Hodnota determinantu matice zhodnej transformácie): Nech $f : E_n \to E_n$ je zhodná transformácia s analytickým vyjadrením $\mathbb{Y} = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{R}$. Potom $\det \mathbb{A} = \pm 1$.
Dôkaz:

$$1 = \det \mathbb{I} = \det(\mathbb{A}^T \mathbb{A}) = \det \mathbb{A}^T \det \mathbb{A} = (\det \mathbb{A})^2,$$

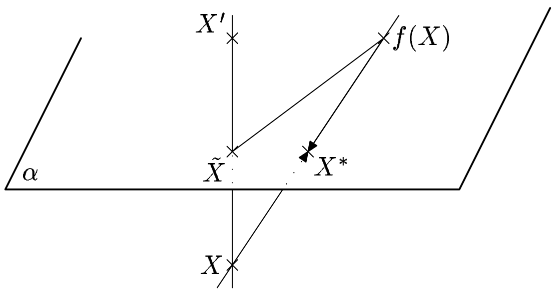
teda $\det \mathbb{A} = \pm 1$. □

Veta 29 (Grupa priamych zhodností): Všetky priame zhodnosti tvoria grupu spolu s operáciou skladania zobrazení. Označujeme ju $ZP(E_n)$.
Dôkaz: Treba ukázať, že zložením dvoch priamych zhodností dostaneme zhodnosť a že inverzné zobrazenie ku zhodnosti je zhodnosť. Obe možno dokázať z analytického vyjadrenia zloženej transformácie. Ak $f, g : E_n \to E_n$ sú zhodné transformácie a $\mathbb{Y} = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{R}$, $\mathbb{Y} = \mathbb{B}\mathbb{X} + \mathbb{S}$ sú analytické vyjadrenia príslušných zobrazení vzhľadom na nejakú bázu, tak $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{B} = 1$. Keďže zobrazenie $f \circ g$ má maticu $\mathbb{A}\mathbb{B}$, tak ide opäť o priamu zhodnosť. Analogicky to dokážeme pre inverzné zobrazenie, ak použijeme fakt, že $\mathbb{A}^T$ je matica inverznej transformácie ku transformácii f a že identické zobrazenie je priama zhodnosť. □

Cvičenie 90: Nájdite (ne)priame zhodné zobrazenie, ktoré zobrazuje
a) $[1, 0]^T \mapsto [0, 0]^T$ a $[0, 0]^T \mapsto [0, 1]^T$
b) $[1, 0]^T \mapsto [1, 1]^T$ a $[5, 2]^T \mapsto [-1, 5]^T$
Cvičenie 91: Nájdite zhodné zobrazenie, ktoré má bod $[4, 0]^T$ samodružný a smery $(1, 1)^T$, $(1, -1)^T$ sú tiež samodružné. Koľko je takých zobrazení?
Cvičenie 92: Koľko existuje zhodností zobrazujúcich bod $[0, 0]^T \mapsto [3, 4]^T$ a bod $[0, 5]^T$ do niektorého bodu priamky $4x - 3y = 0$?
Cvičenie 93: Nájdite zhodné zobrazenie $f : E_2 \to E_3$ tvaru $f \equiv \{x' = x + \frac{1}{2}y + 1, y' = ax + \frac{1}{2}y - 1, z' = bx + cy + 3\}$.

Podobne ako základné afinity tvoria generujúce prvky grupy všetkých afinít nejakého konečnorozmerného euklidovského priestoru, existujú generátory aj pre grupu všetkých zhodností. Ukážeme si, že ide o podmnožinu základných afinít. Nech α je nadrovina v priestore E_n. Skúsme nájsť všetky zhodnosti medzi základnými afinitami.

Veta 30 (Zhodnosti medzi základnými afinitami): Nech $f : E_n \to E_n$ je základná afinita s bodovo samodružnou nadrovinou $\alpha : g(X) = \boldsymbol{n}_\alpha(X - S) = 0$. Ak f je zhodné zobrazenie, tak smer $s_f = \boldsymbol{n}_\alpha$ a $k_f = -1$.
Dôkaz: Ak $f(X) - X \in V_\alpha$, tak $k_f = 1$, a teda $g(f(X)) = g(X)$. Nech $\tilde{X}$ je kolmý priemet bodu X do nadroviny α. Keďže f je zhodné, platí $\|X - \tilde{X}\| = \|f(X) - f(\tilde{X})\| = \|f(X) - \tilde{X}\|$, čo znamená, že $f(X) = X$. Teda v tomto prípade je f identita.



Obrázok 10: Zhodnosť, ktorá je základnou afinitou.

Ak $f(X) - X \notin V_\alpha$, tak z definície deliaceho pomeru pre body $(f(X)XX^*)$ a dôsledku 10 na strane 23 vidno, že $k_f = (f(X)XX^*) = \frac{g(f(X))}{g(X)} = -1$. To znamená, že body X a $f(X)$ ležia v opačných polpriestoroch určených nadrovinou α. Nech $\tilde{X}$ je kolmý priemet bodu X do nadroviny α (pozri obr. 10). Teda $\|X - \tilde{X}\| = \|f(X) - \tilde{X}\|$. Takisto platí, že $X^* - f(X) = -(X^* - X)$. Ak body X, $f(X)$ a $\tilde{X}$ tvoria trojuholník, tak je rovnoramenný zo základňou $Xf(X)$ a príslušnou výškou $\tilde{X}X^*$. Potom ale $|\angle X\tilde{X}X^*| + |\angle XX^*\tilde{X}| = \pi$, čo nie je v euklidovskom priestore možné. Čiže body X, $f(X)$ a $\tilde{X}$ ležia na jednej priamke a naviac $X^* = \tilde{X}$. Ihneď vidno, že $f(X) - X$ určuje normálový smer nadroviny α. □

Definícia 20 (Súmernosť podľa nadroviny): Základnú afinitu s bodovo samodružnou nadrovinou α, ktorá je zhodnosťou nazývame súmernosťou podľa nadroviny α.
Dôsledok 13 (Vyjadrenie súmernosti podľa nadroviny): Súmernosť podľa nadroviny α sa dá vyjadriť ako

$$f(X) = X - 2\frac{g(X)}{\boldsymbol{n}_\alpha \boldsymbol{n}_\alpha}\boldsymbol{n}_\alpha \tag{6}$$

Dôkaz: Stačí dosadiť do vyjadrenia (5) na strane 19 a uvedomiť si, ako vyzerá zobrazenie g^*. □

Veta 31 (Súmernosť určená dvomi bodmi): Nech $A, B \in E_n$ sú rôzne. Potom existuje jediná súmernosť podľa nadroviny, ktorá zobrazuje A do B. Možno ju vyjadriť v tvare

$$f(X) = X - 2\frac{\left(X - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A\right)(B - A)}{(B - A)(B - A)}(B - A) \tag{7}$$

Dôkaz: Nech f je taká súmernosť podľa nadroviny α. Potom $k_f = -1$, $\boldsymbol{s}_f = B - A = \boldsymbol{n}_\alpha$. Zostáva určiť aspoň jeden bod tejto nadroviny. Vieme ale, že $(f(A)AA^*) = (BAA^*) = -1$, teda A^* je stred úsečky AB, čiže patrí nadrovine α. Potom má nadrovina α vyjadrenie $(X - A^*)(B - A) = 0$ a dosadením do (6) dostávame výsledok (7). □

Poznámka 14: Súmernosť podľa nadroviny je špeciálne zobrazenie. ktoré je inverzné samo k sebe. Takéto zobrazenia sa nazývajú involúcie a hrajú dôležitú úlohu v teorii afinných zobrazení.
Cvičenie 94: Nech $A, B \in E_n$. Ukážte, že množina všetkých bodov, ktoré sú rovnako vzdialene od A aj od B je rovina súmernosti určená týmito dvoma bodmi.
Cvičenie 95: Nájdite zhodné zobrazenie, ktoré je osovou súmernosťou s osou
a) $2x + y - 2 = 0$
b) $x + y - 5 = 0$

Cvičenie 96: Nájdite zhodné zobrazenie, ktoré je rovinovou súmernosťou
a) podľa roviny $x + 2y - z + 4 = 0$
b) podľa roviny $2x - 2y + z = 0$
c) a zobrazuje $[1, 0, 5]^T \mapsto [0, 5, 1]^T$
d) a zobrazuje $[1, 0, -2]^T \mapsto [3, 2, 0]^T$

Cvičenie 97: Určte obraz priamky $p \equiv \{x = 1 + 2t, y = 1 + 2t, z = 1 - t\}$ v súmernosti zobrazujúcej bod $[0, 0, 0]^T \mapsto [2, 2, 8]^T$.

Veta 32 (O rozklade zhodnej transformácie na nadrovinové súmernosti): Nech $f : E_n \to E_n$ je zhodná transformácia priestoru E_n. Potom existuje nanajvýš $n + 1$ nadrovinových súmerností $f_0, \dots, f_n$ takých, že $f(X) = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_0(X)$ pre každé $X \in E_n$.
Dôkaz: Veta 21 na strane 19 nám hovorí, že každú afinnú transformáciu možno rozložiť na základné afinity. Pri rozklade zhodnej transformácie budeme postupovať analogicky, len príslušné nadroviny α_i, $i = 0, \dots, n$ budeme voliť vhodnejšie. Nech $A_0, \dots, A_n$ sa zobrazia na body $B_0, \dots, B_n$ v transformácii f a nech sú to množiny lineárne nezávislých bodov. Zvoľme nadrovinu α_0 tak, aby sa v nadrovinovej súmernosti podľa α_0 zobrazil bod A_0 na B_0. Nech $A_i \mapsto B_i^0$ pre $i = 1, \dots, n$.

Ďalej postupujeme indukčným krokom. Majme zostrojené zobrazenia $f_0, \dots, f_{j-1}$ pre $0 < j \leq n$. Zostrojme f_j takto. Ak $B_{j-1}^j \neq B_j$, potom nech α_j je taká nadrovina, že body B_{j-1}^j a B_j sú súmerné podľa tejto nadroviny. Vzhľadom na zhodnosť zobrazení $f_0, \dots, f_{j-1}$ je vzdialenosť bodu B_i k bodom B_j^{j-1} a B_j rovnaká pre $i = 0, \dots, j - 1$, to znamená, že body $B_0, \dots, B_{j-1} \in \alpha_j$ (Podrobne si to ukážte!). To znamená, že v zobrazení f_j sú tieto body samodružné. Ak $B_{j-1}^j = B_j$, položme $f_j(X) = X$. Označme ešte $B_i^j := f_j(B_i^{j-1})$ pre $i = j + 1, \dots, n$.

Ak $j > n$, tak sme skončili a stačí už len ukázať, podobne ako v dôkaze vety 21 na strane 19, že zložením týchto súmerností dostaneme zhodnosť f. □

Teraz sa zameriame na opis grupy zhodností priestoru E_2. V tomto priestore existujú zhodné zobrazenia, ktoré nie sú ani nadrovinové ani posunutia.

Definícia 21 (Otočenie roviny): Transformácia E_2, ktorá má taký samodružný bod S, že pre ľubovoľný bod $X \neq S$ platí, $\phi = \angle X - S, f(X) - S$ je konštantný a $\|X - S\| = \|f(X) - S\|$ sa nazýva otočením okolo bodu S o uhol ϕ. Bod S sa nazýva stredom otáčania.

Cvičenie 98: Zistite, či existuje zhodné zobrazenie E_2 do E_3, ktoré $[1,2]^T \mapsto [4,1,0]^T$ a $[2,-3]^T \mapsto [6,8,0]^T$.

Cvičenie 99: V zhodnom zobrazení $f : E_3 \to E_3$ sú body $[0,0,0]^T$ a $[1,1,1]^T$ samodružné a bod $[1,-1,0]^T$ sa zobrazí na bod s prvou súradnicou nulovou. Určte ostatné súradnice tohoto bodu.

Cvičenie 100: Určte s tak, aby existovala zhodnosť, ktorá zobrazí bod $[0,0]^T \mapsto [5,0]^T$ a $[3,4]^T \mapsto [9,s]^T$. Nájdite rovnice takéhoto zobrazenia a určte obraz bodu $[5,0]^T$.

Cvičenie 101: Zistite, či f je zhodnosť

a) $f \equiv \{x' = x - \frac{1}{2}y + 1, y' = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + 1\}$
b) $f \equiv \{x' = x + 4, y' = y + 3\}$
c) $f \equiv \{x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y + 1, y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + 1, z' = \frac{1}{2}x\}$

Cvičenie 102: Dokážte, že všetky priame zhodnosti priestoru E_1 sú posunutia. Ako vyzerajú všetky nepriame zhodnosti priestoru E_1?

Cvičenie 103: Nech je daná v E_n nadrovina $\alpha : (X - S).\boldsymbol{n}_\alpha = 0$. Dokážte, že zobrazenie $f(X) = f_\alpha(X) + k\boldsymbol{n}_\alpha$, kde f_α je osová súmernosť podľa nadroviny α a $k \in R$, je nadrovinová súmernosť. Nájdite nadrovinu súmernosti tohto zobrazenia! Premyslite si, čo to znamená v priestoroch E_2 a E_3!

Cvičenie 104: Dokážte tvrdenie: Ak $f : E_2 \to E_2$ je priama zhodná transformácia, potom má v nejakej karteziánskej súradnicovej sústave vyjadrenie

$$x' = x\cos\phi - y\sin\phi + r_1$$
$$y' = x\sin\phi + y\cos\phi + r_2$$

Cvičenie 105: Dokážte tvrdenie: Ak $f : E_2 \to E_2$ je nepriama zhodná transformácia, potom má v nejakej karteziánskej súradnicovej sústave vyjadrenie

$$x' = x\cos\phi + y\sin\phi + r_1$$
$$y' = x\sin\phi - y\cos\phi + r_2$$

Cvičenie 106: Nájdite zhodné zobrazenie, ktoré zobrazuje body $[0,0,0]^T \mapsto [1,0,0]^T$, $[1,0,0]^T \mapsto [1,1,0]^T$, $[1,1,0]^T \mapsto [1,1,1]^T$.

Cvičenie 107: Nájdite zhodné zobrazenie, v ktorom sú body $[1,0,0]^T$, $[0,1,0]^T$ a $[0,0,1]$ samodružné.

Veta 33 (Klasifikácia zhodných transformácií E_2): Nech $f : E_2 \to E_2$ je zhodná transformácia a $\mathbb{Y} = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{R}$ je jej vyjadrenie v niektorej karteziánskej súradnicovej sústave. Potom $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ alebo $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$ a f patrí do niektorej z nasledujúcich kategórií

a) každý bod v rovine je samodružný – zobrazenie f je identické
b) existuje priamka p samodružných bodov – zobrazenie je osovou súmernosťou podľa priamky p
c) existuje práve jeden samodružný bod P – zobrazenie je otočením okolo P o uhol ϕ
d) neexistuje žiaden samodružný bod a zobrazenie je nepriamou zhodnosťou – zobrazenie je posunutou súmernosťou
e) neexistuje ani jeden samodružný bod a zobrazenie je priamou zhodnosťou – zobrazenie je posunutím

Dôkaz: Z vlastnosti $\mathbb{A}^T\mathbb{A} = \mathbb{I}$ vyplýva, že $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$, $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$, $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$. To znamená, že možno písať

$$a_{11} = \cos\phi \quad a_{21} = \sin\phi \quad a_{12} = -\sin\phi \quad a_{22} = \cos\phi, \tag{8}$$

ak zobrazenie zachováva orientáciu alebo

$$a_{11} = \cos\phi \quad a_{21} = \sin\phi \quad a_{12} = \sin\phi \quad a_{22} = -\cos\phi, \tag{9}$$

ak zobrazenie nezachováva orientáciu. Podľa vety 13 na strane 12 buď existuje lineárna variéta samodružných bodov alebo afinita nemá žiaden samodružný bod. Podľa tejto množiny budeme triediť zobrazenia do disjunktných množín.

Ak každý bod roviny je samodružný, potom matica $\mathbb{A} - \mathbb{I}$ musí mať hodnosť 0, teda $\mathbb{A} = \mathbb{I}$ a naviac (podľa Frobéniovej vety) vektor $\mathbb{R} = \mathbb{O}$. V tomto prípade ide teda o identické zobrazenie.

Ak existuje priamka samodružných bodov p, potom zobrazenie f je základnou afinitou. Podľa vety 30 na strane 24 je toto zobrazenie už nutne súmernosťou podľa priamky p, čo znamená, že v báze $\langle P, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\rangle$, kde $P \in p$, $\boldsymbol{p}$ je smerový vektor priamky p a $\boldsymbol{q}$ je normálový vektor priamky p (oba jednotkovej dĺžky), má zobrazenie f vyjadrenie

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ak existuje práve jeden samodružný bod $P = [x_0, y_0]^T$ a zobrazenie je priamou zhodnosťou, tak platia nasledujúce tvrdenia pre ľubovoľný bod $X = [x, y]^T$, $X \neq P$ a jeho obraz $f(X)$:

$$\begin{aligned} \|f(X) - P\|^2 =& (x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 = (x - x_0)^2 \cos^2 \phi + 2(x - x_0)(y - y_0) \cos \phi \sin \phi + \\ &+ (y - y_0)^2 \sin^2 \phi - (x - x_0)^2 \sin^2 \phi + 2(x - x_0)(y - y_0) \cos \phi \sin \phi + (y - y_0)^2 \cos^2 \phi = \\ =& (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \|X - P\|^2. \end{aligned}$$

Ďalej možno písať pre kladne orientovaný uhol vektorov $X - P$ a $f(X) - P$

$$\frac{\langle X - P, f(X) - P\rangle}{\|X - P\|\|f(X) - P\|} = \cos \phi$$
$$\frac{\begin{vmatrix} X - P \\ f(X) - P \end{vmatrix}}{\|X - P\|\|f(X) - P\|} = \sin \phi,$$

čo znamená, že uhol vektorov $X - P$ a $f(X) - P$ je konštantný pre všetky $X \neq P$. Teda zobrazenie f je otočením okolo P o uhol ϕ.

Ak existuje práve jeden samodružný bod (nech je to začiatok sústavy súradníc) a zobrazenie f je nepriamou zhodnosťou, potom $\mathbb{A} - \mathbb{I}$ je singulárna matica (berúc do úvahy špeciálny tvar (9) na strane 26) a teda existuje netriviálne riešenie systému $(\mathbb{A} - \mathbb{I})\mathbb{X} = \mathbb{O}$, čo znamená, že zobrazenie f má samodružný smer s vlastným číslom 1. Ten nám spolu so samodružným bodom dáva celú priamku samodružných bodov, a to je spor s predpokladom.

Ak f nemá samodružný bod a f je priame zobrazenie, potom má matica $\mathbb{A} - \mathbb{I}$ hodnosť 0 alebo 1 a matica $\mathbb{A} - \mathbb{I}, \mathbb{R}$ hodnosť buď 1 alebo 2. Ak $h(\mathbb{A} - \mathbb{I}) = 0$, tak $\mathbb{A} = \mathbb{I}$, teda zobrazenie f je posunutie v smere $\mathbb{R}$. Ak $h(\mathbb{A} - \mathbb{I}) = 1$, tak $0 = \det(\mathbb{A} - \mathbb{I}) = 2(1 - \cos \phi)$, čo znamená, že $\mathbb{A} - \mathbb{I} = \mathbb{O}$ a to je spor.

Ak f nemá samodružný bod a f je nepriamou zhodnou transformáciou roviny, tak $h(\mathbb{A} - \mathbb{I}) = 1$ a $h(\mathbb{A} - \mathbb{I}) = 2$. Nech $\boldsymbol{u} \in V_2$ je taký vektor, že zobrazenie $\bar{f}(X) = f(X) - \boldsymbol{u}$ má bodovo samodružnú priamku p (Rozmyslite si, prečo taký vektor existuje a ako by sme ho pre konkrétne zobrazenie získali!). Potom zobrazenie f je zložením osovej súmernosti a posunutia. Vektor $\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{n} + l\boldsymbol{s}$, kde $\boldsymbol{n}$ je normálový vektor samodružnej priamky p a $\boldsymbol{s}$ je vektor k nemu kolmý. Teda $f(X) = \bar{f}(X) + k\boldsymbol{n} + l\boldsymbol{s} = \tilde{f}(X) + \boldsymbol{s}$. Dá sa ľahko ukázať, že zobrazenie $\tilde{f}$ je osová súmernosť, ktorej os je rovnobežná s osou zobrazenia $\bar{f}$. Môžeme teda konštatovať, že zobrazenie f je zložením osovej súmernosti a posunutia v smere jej osi. □

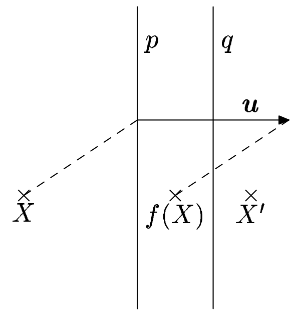
Veta 34 (Rozklad zhodností E_2 na osové súmernosti):

a) Posunutie o vektor $\boldsymbol{u}$ sa dá rozložiť na dve osové súmernosti s rovnobežnými osami, ktoré sú vzdialené $\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}\|$. Osi týchto dvoch súmerností sú kolmé na smer posunutia.
b) Otočenie sa dá rozložiť na dve osové súmernosti, pričom osi prechádzajú stredom otáčania a zvierajú uhol, ktorý je rovný polovici uhla otočenia.
c) Posunutá súmernosť sa dá rozložiť na tri osové súmernosti.

Dôkaz:

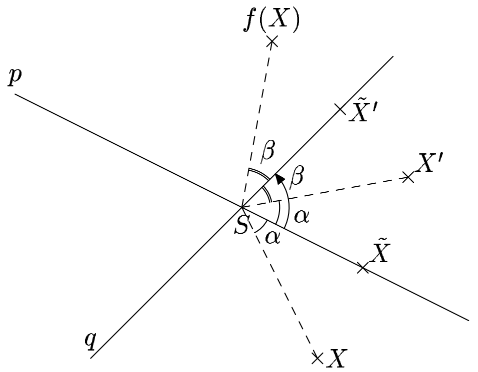
a) Nech $\boldsymbol{u}$ je vektor posunutia. Zostrojme priamku $p : (X - S)\boldsymbol{u} = 0$ a priamku $q : \left(X - \left(S + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}\right)\right) \boldsymbol{u} = 0$ (pozri obr. 11 na strane 28). Potom zložením týchto dvoch osových súmerností dostávame posunutie o vektor $\boldsymbol{u}$. Označme $f_p(X) = X - 2\frac{(X-S)\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}$ osovú súmernosť s osou p a $f_q(X) = X - 2\frac{(X-(S+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}))\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}$ osovú súmernosť s osou q a $f = f_q \circ f_p$. Potom

$$\begin{aligned} f(X) &= X - 2\frac{(X - S)\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} - 2\frac{\left(X - 2\frac{(X-S)\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} - \left(S + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}\right)\right)\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} = \\ &= X - 4\frac{(X - S)\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} + 4\frac{(X - S)\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} + 2\frac{1}{2}\boldsymbol{u} = X + \boldsymbol{u} \end{aligned}$$



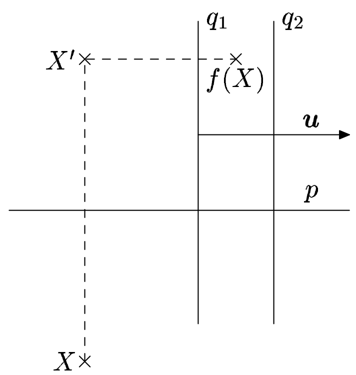
Obrázok 11: Rozklad posunutia na osové súmernosti.

b) Nech p a q sú dve priamky spĺňajúce podmienky tvrdenia (pozri obr. 12) a f_p a f_q sú súmernosti podľa týchto priamok. Nech $X' = f_p(X)$, $\tilde{X}$ je kolmý priemet bodu X do priamky p, $\tilde{X}'$ je kolmý priemet X' do q. Bod $S = p \cap q$ je samodružný. Zo zhodnosti trojuholníkov $\triangle XS\tilde{X}$ a $\triangle X'S\tilde{X}$ a zo zhodnosti trojuholníkov $\triangle X'S\tilde{X}'$ a $\triangle f_q \circ f_p(X)S\tilde{X}'$ možno usúdiť, že $\|f(X) - S\| = \|X - S\|$ a súčet orientovaných uhlov $2\alpha + 2\beta = \angle XSf(X)$ je konštantný.



Obrázok 12: Rozklad otáčania na osové súmernosti.

c) Posledný prípad vyplýva z prípadu a) a z dôkazu vety 33 na strane 26 (pozri obr. 13).



Obrázok 13: Rozklad posunutej súmernosti na osové súmernosti.

□

Dôsledok 14 (Tabuľka skladania zhodností v E_2): V grupe zhodností E_2 platí nasledujúca tabuľka skladania zhodností

	id	S	O	P	PS
id	id	S	O	P	PS
S	S	O,P	S	S,PS	O,P
O	O	S	O,P	O	PS
P	P	S,PS	O	P	S,PS
PS	PS	O,P	PS	S,PS	P,O

,

kde S osová súmernosť, P je posunutie, O otočenie, PS je posunutá súmernosť a id sa môžme chápať ako špeciálne otočenie alebo posunutie.

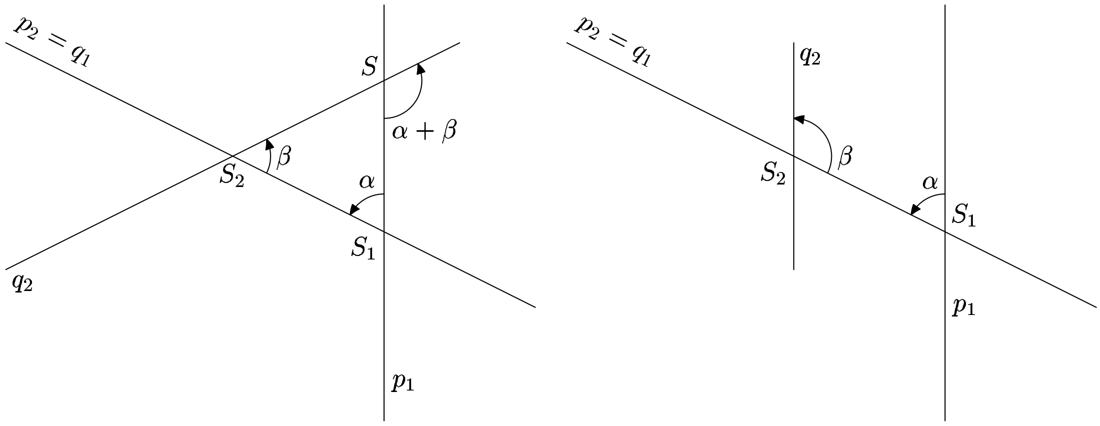
Dôkaz: Dôkaz vychádza z viet 33 na strane 26, 34 na strane 27. Na ukážku si urobíme dôkaz pre kompozíciu dvoch otočení.

Nech f je otočenie roviny okolo bodu S_1 o uhol α a g je otočenie roviny okolo bodu S_2 o uhol β. Zobrazenie f môžme rozložiť na dve osové súmernosti podľa priamok p_1 a p_2 tak, že $S_2 \in p_2$. Os p_2 zvolíme za prvú os pri rozklade zobrazenia g (pozri obr. 14). Ak existuje $p_1 \cap q_2$, označme ho S. Potom výsledné zobrazenie možno písať

$$g \circ f = g_{q_2} \circ \underbrace{g_{q_1} \circ f_{p_2}}_{id} \circ f_{p_1} = g_{q_2} \circ f_{p_1},$$

teda má samodružný bod S a dá sa rozložiť na dve osové súmernosti podľa priamok p_1 a q_2. Takže ide o otočenie okolo S o uhol $\alpha + \beta$.

Podrobne si premyslite ďalšie prípady!



Obrázok 14: Kompozícia dvoch otočení v rovine s výsledným otočením a s výsledným posunutím.

□

Cvičenie 108: Rovina sa otočí v zobrazení f okolo počiatku sústavy súradníc o uhol α. Čo bude obrazom priamok $x = p, p \in R$?

Cvičenie 109: Nájdite uhol, o ktorý treba otočiť rovinu okolo ľubovoľného bodu, aby priamka $2x + 5y - 3 = 0$ mala obraz rovnobežný s osou y.

Cvičenie 110: Rovina sa otáča okolo bodu $[-3, 4]^T$ o uhol $\frac{\pi}{2}$. Do akých priamok sa zobrazia osi súradnicovej sústavy?

Cvičenie 111: Rovina sa otáča okolo bodu $[-1, 3]^T$ o uhol $\frac{\pi}{4}$. Do akých priamok sa zobrazia osi súradnicovej sústavy?

Cvičenie 112: Rovina sa otáča okolo bodu $[2, 3]^T$ o uhol α, pričom $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ a $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$. Čo je obrazom priamky $x + 2y + 3 = 0$?

Cvičenie 113: Nájdite dva vrcholy rovnostranného trojuholníka, ak viete, že ležia na súradnicových osiach a tretí vrchol je bod $[1, 1]^T$.

Cvičenie 114: Napíšte rovnice osovej súmernosti podľa roviny $x + 2y - z + 4 = 0$.

Cvičenie 115: Nájdite rovnice osovej súmernosti zobrazujúcej začiatok do bodu $[1, 5]^T$.

Cvičenie 116: Nech je daná priamka $p \equiv 2x - y - 1 = 0$ a dva rôzne body $R = [-1, 1]^T$ A $S = [0, 4]^T$, ktoré ležia v jednej polrovine vyťatej priamkou p. Určte $\triangle RST$ s vrcholom $T \in p$ tak, aby mal čo najmenší obvod.

Cvičenie 117: Určte o aké zobrazenie ide a rozložte ho na osové súmernosti

a) $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1, y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$
b) $x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 6, y' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 12$
c) $x' = -y + 1, y' = x + 3$
d) $x' = -x + 2, y' = -y + 1$
e) $x' = -x + 1, y' = y + 3$
f) $x' = \frac{2}{3}x - \frac{\sqrt{5}}{3}y + 1, y' = -\frac{\sqrt{5}}{3}x - \frac{2}{3}y - 2$
g) $x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 3, y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \sqrt{3}$

Cvičenie 118: Napíšte rovnice strán pravidelného šesťuholníka, ak na priamke $4x + 2y - 1 = 0$ leží jedna jeho strana a začiatok sústavy súradníc je jeho stredom súmernosti.

Cvičenie 119: Daná je priamka p, na ktorej leží strana rovnostranného trojuholníka. Nech T je ťažisko tohoto trojuholníka. Určte vrcholy tohto trojuholníka, ak $p \equiv 2x - y = 0$ a $T = [5, 1]^T$.
Cvičenie 120: Nájdite vrcholy ostrých uhlov rovnoramenného pravouhlého trojuholníka, ak poznáte tretí vrchol $C = [1, 2]^T$ a priamky $8x - y - 20 = 0$, $7x + 4y - 41 = 0$, na ktorých ležia hľadané vrcholy.
Cvičenie 121: Nech f je otočenie roviny E_2 o uhol ϕ okolo bodu S a g je otočenie o uhol ψ okolo bodu T. Nech $g \circ f$ je posunutie. Určte vektor posunutia $g \circ f$! Ako je to s $f \circ g$?

Veta 35 (Klasifikácia zhodných transformácií E_3): Nech $f : E_3 \to E_3$ je zhodná transformácia a $\mathbb{Y} = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{R}$ je jej vyjadrenie v niektorej karteziánskej súradnicovej sústave. Potom f patrí do niektorej z nasledujúcich kategórií

a) každý bod v rovine je samodružný – zobrazenie f je identické
b) existuje rovina α samodružných bodov – zobrazenie je rovinovou súmernosťou podľa roviny α
c) existuje priamka p samodružných bodov – zobrazenie je rotáciou priestoru okolo osi p
d) existuje práve jeden samodružný bod – zobrazenie je rotačnou symetriou
e) neexistuje žiaden samodružný bod a zobrazenie je nepriamou zhodnosťou – zobrazenie je posunutou súmernosťou
f) neexistuje ani jeden samodružný bod, zobrazenie je priamou zhodnosťou – zobrazenie je posunutím alebo skrutkovým pohybom

Dôkaz: Prípady a), b) sa dokážu podobne ako vo vete 33 na strane 26.

Ak každý bod roviny je samodružný, potom matica $\mathbb{A} - \mathbb{I}$ musí mať hodnosť 0, teda $\mathbb{A} = \mathbb{I}$ a naviac (podľa Frobéniovej vety) vektor $\mathbb{R} = \mathbb{O}$. V tomto prípade ide teda o identické zobrazenie.

Ak existuje rovina samodružných bodov α, potom zobrazenie f je základnou afinitou. Podľa vety 30 na strane 24 je toto zobrazenie už nutne súmernosťou podľa roviny α, čo znamená, že v báze $\langle P, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{q}\rangle$, kde $P \in \alpha$, $\boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_2}$ sú karteziánske bázové smerové vektory roviny α a $\boldsymbol{q}$ je normálový vektor roviny α (jednotkovej dĺžky), má zobrazenie f vyjadrenie

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Ak existuje priamka samodružných bodov, označme P niektorý z jej bodov a jej normalizovaný smer označme $\boldsymbol{p}$. Doplňme vektory $\boldsymbol{q_1}$ a $\boldsymbol{q_2}$ tak, aby $\langle P, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q_2}\rangle$ tvorili karteziánsku sústavu súradníc. V takejto báze bude mať naše zobrazenie tvar

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{32} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

pričom podmatica typu 2×2 v ľavom dolnom rohu matice zobrazenia f predstavuje maticu zobrazenia $f|_{\alpha_r}$, kde α_r je rovina kolmá na priamku $y = 0, z = 0$ obsahujúca bod $R_r = [r, 0, 0]^T$. V každej z týchto rovín má zobrazenie jediný samodružný bod, a to R_r, z vety 33 na strane 26 vyplýva, že ide o rotáciu okolo tohoto bodu. Celkovo možno konštatovať, že v tomto prípade možno zobrazenie zapísať v tvare

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

kde ϕ je uhol otočenia okolo osi $y = 0, z = 0$.

Ak existuje práve jeden samodružný bod P, potom musí existovať aspoň jeden samodružný smer s vlastným číslom -1 (Keďže $\det(A - cI) = 0$ je polynóm 3. stupňa, musí mať aspoň jeden reálny koreň. Ak by to bola 1, tak samodružný smer prislúchajúci tomuto číslu by spolu s bodom P dávali bodovo samodružnú priamku). Nech $\boldsymbol{p}$ je normalizovaný vektor prislúchajúci vlastnému číslu -1. Zvoľme karteziánsku súradnicovú sústavu $\langle P, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q_2}\rangle$. V tejto sústave má naše zobrazenie tvar

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{32} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

pričom pre ľavú dolnú podmaticu $\tilde{A}$ platí $\det(\tilde{\mathbb{A}} - \mathbb{I}) \neq 0$, keďže analogický vzťah platí pre maticu $\mathbb{A}$. Z toho vyplýva, že zobrazenie f zúžené na rovinu $z = 0$ má jediný samodružný bod, a síce počiatok, teda ide o otočenie a možno ho zapísať v tvare

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

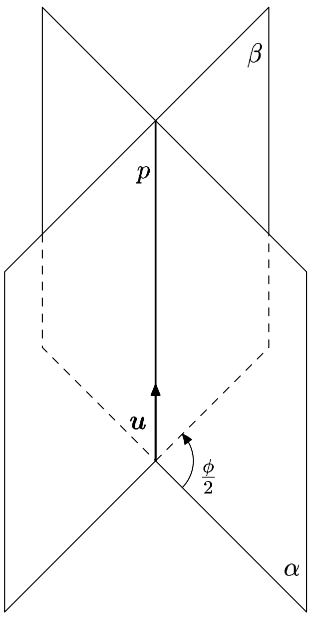
kde ϕ je uhol otočenia okolo osi $y = 0, z = 0$. Celé zobrazenie potom predstavuje otočenie okolo osi $x = 0, y = 0$ a nasledované súmernosťou podľa roviny $z = 0$ (alebo v opačnom poradí).

V prípade, že zobrazenie nemá samodružný bod, tak možno nájsť taký vektor $\boldsymbol{v}$ (tak, aby $h(\mathbb{A} - \mathbb{I}, \mathbb{R} - \mathbb{V}) < 3$), že zobrazenie $\bar{f}(X) = f(X) - \boldsymbol{v}$ bude mať aspoň priamku samodružných bodov. Teda bude buď kategórie a) alebo b) alebo c). Rozmyslite si prečo nemôže byť kategórie d)! Ak je zobrazenie $\bar{f}$ kategórie a), potom zobrazenie f je posunutie, lebo $f(X) = \bar{f}(X) + \boldsymbol{v}$. Ak je zobrazenie typu b), potom možno jednoznačne rozložiť vektor $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$, pričom $\boldsymbol{w}$ sa nachádza v smere príslušnej bodovo samodružnej nadroviny zobrazenia $\bar{f}$ a $\boldsymbol{u}$ je kolmý k smeru tejto nadroviny. Dá sa ukázať, že zobrazenie $\bar{f}(X) + \boldsymbol{u}$ je opäť rovinová súmernosť (podobne ako vo vete 34 na strane 27), pričom samodružná rovina tohto zobrazenia je rovnobežná so samodružnou rovinou zobrazenia $\bar{f}$. Teda výsledné zobrazenie je zložené z nadrovinovej súmernosti a posunutia vektorom rovnobežným so samodružnou rovinou. Analogicky, ak zobrazenie $\bar{f}$ patrí do kategórie c), tak možno jednoznačne rozložiť vektor $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$, pričom $\boldsymbol{w}$ sa nachádza v smere príslušnej bodovo samodružnej priamky zobrazenia $\bar{f}$ a $\boldsymbol{u}$ je kolmý k smeru tejto priamky. Potom z vety 33 na strane 26 vyplýva, že $\bar{f} + \boldsymbol{u}$ je otočenie okolo nejakej priamky rovnobežnej so samodružnou priamkou zobrazenia $\bar{f}$, a teda zobrazenie f sa dá napísať ako zloženie rotácie okolo priamky a posunutia v smere tejto priamky. □

Veta 36 (Rozklad zhodností E_3 na rovinové súmernosti):

a) Posunutie o vektor $\boldsymbol{u}$ sa dá rozložiť na dve rovinové súmernosti s rovnobežnými rovinami súmernosti, ktoré sú vzdialené $\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}\|$ a kolmé na smer posunutia.
b) Rotácia okolo priamky p o uhol α sa dá rozložiť na dve rovinové súmernosti, pričom roviny súmernosti obsahujú priamku p a zvierajú uhol $\frac{1}{2}\phi$.
c) Rotačná symetria sa dá rozložiť na tri rovinové súmernosti.
d) Posunutá súmernosť sa dá rozložiť na tri rovinové súmernosti.
e) Posunutá rotácia sa dá rozložiť na štyri rovinové súmernosti.

Dôkaz: Dôkaz prípadov a) je analogický ako vo vete 34 na strane 27. Dôkaz tvrdenia b) je jednoduchý, keď si uvedomíme, že rotácia okolo priamky sa dá redukovať na otočenia v rovinách kolmých k osi otočenia (pozri obr. 15.



Obrázok 15: Rozklad rotácie priestoru okolo priamky p o uhol ϕ.

Prípadné posunutie alebo rovinovú súmernosť vieme následne rozložiť podľa predchádzajúcich tvrdení. □

Cvičenie 122: Nájdite rovnice zhodného zobrazenia, ktoré je zložením rovinovej súmernosti podľa roviny $2x - y - 5z + 15 = 0$ a posunutia o vektor $(4, 3, 1)^T$. Klasifikujte toto zobrazenie.
Cvičenie 123: Zostavte tabuľku skladania zhodností v $Z(E_3)$.
Cvičenie 124: Nájdite samodružné body zhodnosti zloženej zo súmerností podľa rovín $z = 0$ a $x - y + 2z - 1 = 0$.
Cvičenie 125: Napíšte rovnice otáčania v priestore E_3 okolo jednotlivých súradnicových osí.
Cvičenie 126: Nájdite rovnice súmerností podľa priamky prechádzajúcej začiatkom sústavy súradníc so smerovým vektorom $(2, 2, 1)^T$.

Cvičenie 127: Nájdite rovnice otáčania okolo osi $o \equiv \{x = t, y = t, z = 1 + t\}$ o uhol $\phi = \frac{2}{3}\pi$.
Cvičenie 128: Určte geometrický zmysel zobrazení a rozložte na rovinové súmernosti
a) $x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 1, y' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 3, z' = -z + 2$
b) $x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1, y' = \frac{11}{15}x - \frac{10}{15}y - \frac{2}{15}z - 2, z' = \frac{2}{15}x + \frac{5}{15}y - \frac{14}{15}z - 1$
c) $x' = \frac{16}{25}x + \frac{12}{25}y - \frac{3}{5}z, y' = \frac{12}{25}x - \frac{9}{25}y + \frac{4}{5}z, z' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y$
d) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1, y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2, z' = z + 3$
e) $x' = x - 1, y' = -y + 6, z' = z + 2$
f) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}z - \frac{6}{5}, y' = y + 1, z' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z + \frac{13}{5}$
g) $x' = \frac{6}{7}x - \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z + 7, y' = -\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z + 14, z' = -\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z - 7$
h) $x' = y + 1, y' = x, z' = z$
i) $x' = \frac{4}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{8}{9}z - 14, y' = \frac{7}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{4}{9}z - 2, z' = -\frac{4}{9}x + \frac{8}{9}y + \frac{1}{9}z + 5$
j) $x' = \frac{4}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{8}{9}z - 4, y' = \frac{7}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{4}{9}z + 2, z' = +\frac{4}{9}x - \frac{8}{9}y - \frac{1}{9}z + 14$
k) $x' = -z + 2, y' = x - 1, z' = -y + 4$
l) $x' = z, y' = -y + 2, z' = -x + 2$
m) $x' = -y + 2, y' = x, z' = -z + 2$
n) $x' = y, y' = -x, z' = -z + 2$
o) $x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 6, y' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 12, z' = -z$
p) $x' = \frac{16}{25}x + \frac{12}{25}y - \frac{15}{25}z + 3, y' = \frac{12}{25}x + \frac{9}{25}y + \frac{20}{25}z - 4, z' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 5$
q) $x' = \frac{16}{25}x + \frac{12}{25}y + \frac{15}{25}z + 3, y' = \frac{12}{25}x + \frac{9}{25}y - \frac{20}{25}z - 4, z' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 5$
r) $x' = \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}y + \frac{10}{15}z + 7, y' = \frac{2}{15}x + \frac{14}{15}y - \frac{5}{15}z + 4, z' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + 6$
s) $x' = -\frac{4}{9}x - \frac{1}{9}y - \frac{8}{9}z + 14, y' = -\frac{7}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{4}{9}z + 2, z' = \frac{4}{9}x - \frac{8}{9}y - \frac{1}{9}z - 5$

Cvičenie 129: Dokážte platnosť nasledujúcej klasifikačnej tabuľky zhodnosti $f : E_3 \to E_3$ pomocou je analytického vyjadrenia v nejakej karteziánskej sústave súradníc:

$h(\mathbb{A} - \mathbb{I})$	$h(\mathbb{A} - \mathbb{I}, \mathbb{R})$	typ zhodnosti
0	0	identita
0	1	posunutie
1	1	súmernosť podľa roviny
1	2	posunutá rovinová súmernosť
2	2	otočenie okolo priamky
2	3	skrutkovitý pohyb
3	3	otočenie okolo priamky a rotácia

Kapitola 8
Podobné zobrazenia

Definícia 22 (Podobné zobrazenie): Zobrazenie $f : E_n \to E_m$ sa nazýva podobné, ak existuje také reálne číslo $k > 0$, že pre ľubovoľné body $X, Y \in E_n$ platí $\|f(X)f(Y)\| = k\|XY\|$, kde $\|.\|$ označuje normu indukovanú skalárnym súčinom v príslušnom Euklidovskom priestore. Číslo k nazývame koeficient podobného zobrazenia f. Ak f je naviac transformácia, tak sa nazýva podobnou transformáciou priestoru E_n. Ak f je afinitou priestoru E_n, tak f sa nazýva podobnosťou priestoru E_n.

Veta 37 (Rovnoľahlosť je podobnosťou): Nech $f : E_n \to E_n$ je rovnoľahlosť s koeficientom k, tak f je podobnosť s koeficientom $|k|$.
Dôkaz: Nech $f(X) = S + k(X - S)$, kde $S \in E_n$ je stred rovnoľahlosti f. Potom keďže f je dilatácia, tak platí

$$\|f(X) - f(Y)\| = \|f^*(X - Y)\| = \|k(X - Y)\| = |k|\|X - Y\|,$$

čo znamená, že f je podobnosťou s koeficientom $|k|$. $\square$

Poznámka 15: V predchádzajúcej vete sme ukázali, že niektoré afinné zobrazenia sú podobnosti. Ukážeme, že každé podobné zobrazenie je afinné zobrazenie.
Cvičenie 130: Ukážte, že všetky rovnoľahlosti priestoru E_n s pevným stredom rovnoľahlosti tvoria grupu.

Veta 38 (Rozklad podobného zobrazenia): Nech $f : E_n \to E_m$ je podobné zobrazenie s koeficientom k. Potom existujú rovnoľahlosti $g : E_n \to E_n$ a $h : E_m \to E_m$ a zhodné zobrazenie $z : E_n \to E_m$ také, že $f = z \circ g = h \circ z$.

Dôkaz: Nech $g(X) = S + k(X - S)$ je rovnoľahlosťou s koeficientom k a ľubovoľným bodom $S \in E_n$ a nech $h(X) = f(S) + k(X - f(S))$. Označme $z = h^{-1} \circ f$. Zobrazenie z je zhodné, lebo

$$\|z(X) - z(Y)\| = \|f(S) + \frac{1}{k}(f(X) - f(S))) - f(S) - \frac{1}{k}(f(Y) - f(S))\| =$$
$$= \|\frac{1}{k}(f(X) - f(Y))\| = \|X - Y\|.$$

Teda platí $f = h \circ z$. Potom je ale f afinné zobrazenie (lebo je zložením dvoch afinných zobrazení). Môžeme teda písať:

$$z(X) = h^{-1} \circ f(X) = f(S) + \frac{1}{k}(f(X) - f(S)) = f(S + \frac{1}{k}(X - S)) = f \circ g^{-1}(X).$$

Teda platí $f = h \circ z = z \circ g$. □

Dôsledok 15 : Každé podobné zobrazenie je afinné injektívne zobrazenie. Každá podobnosť je afinitou.
Dôkaz: Každé podobné zobrazenie možno napísať ako kompozíciu dvoch afinných zobrazení – zhodnosti a rovnoľahlosti a zloženie dvoch afinných zobrazení je afinné zobrazenie. Obe zobrazenia sú naviac injektívne. Ak naviac ide o afinitu, tak z injektívnosti vyplýva aj bijektívnosť. □

Dôsledok 16 (Grupa podobností priestoru E_n): Všetky podobnosti priestoru E_n tvoria grupu podobností priestoru E_n. Označujeme ju $P(E_n)$. Grupa $P(E_n)$ je generovaná všetkými zhodnosťami a podobnosťami priestoru E_n.
Dôkaz: Dôkaz využíva fakty, že každá podobnosť je kompozíciou zhodnosti a rovnoľahlosti a že zhodnosti tvoria grupu a rovnoľahlosti so stredom v pevnom bode tvoria grupu. □

Veta 39 (Vzťah podobného zobrazenia a skalárneho súčinu): Nech $f : E_n \to E_m$ je podobné zobrazenie, potom $\langle f^*(\boldsymbol{u}), f^*(\boldsymbol{v})\rangle = k^2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$ pre ľubovoľné $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V_n$.
Dôkaz: Budeme postupovať podobne ako v dôkaze vety 24 na strane 22.

$$\langle f^*(\boldsymbol{u}), f^*(\boldsymbol{v})\rangle = \frac{1}{2}\Big(\langle f^*(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}), f^*(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\rangle - \langle f^*(\boldsymbol{u}), f^*(\boldsymbol{u})\rangle - \langle f^*(\boldsymbol{v}), f^*(\boldsymbol{v})\rangle\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\langle k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}), k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\rangle - \langle k\boldsymbol{u}, k\boldsymbol{u}\rangle - \langle k\boldsymbol{v}, k\boldsymbol{v}\rangle\Big) = k^2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle.$$

□

Poznámka 16: Z predchádzajúcej vlastnosti vyplýva, že zobrazenie zachováva uhly, teda je ekviformné.

Definícia 23 (Vlastné a nevlastné podobnosti): Podobné zobrazenie s koeficientom $k \neq 1$ sa nazýva vlastným podobným zobrazením. Ostatné podobné zobrazenia sa nazývajú nevlastnými podobnými zobrazeniami.

Veta 40 (Ekvivalentné podmienka pre podobnú transformáciu): Nech zobrazenie $f : E_n \to E_m$ je afinné zobrazenie a $\mathbb{Y} = \mathbb{A}\mathbb{X} + MR$ je jeho analytické vyjadrenie v nejakej karteziánskej sústave súradníc. Potom sú ekvivalentné tvrdenia

a) f je podobné zobrazenie
b) $\mathbb{A}^T\mathbb{A} = k^2\mathbb{I}$

Dôkaz: Stĺpce matice $\mathbb{A}$ tvoria obrazy jednotkových vektorov v kartezianskej sústave súradníc. Ak označíme c_{ij} prvky matice $\mathbb{A}^T\mathbb{A}$, možno písať

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \langle f^*(\boldsymbol{e_i}), f^*(\boldsymbol{e_j})\rangle = k^2\langle \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j}\rangle = k^2\delta_{ij},$$

čo znamená, že ak f je podobné, tak $\mathbb{A}$ spĺňa príslušné podmienku b). Naopak, ak matica $\mathbb{A}$ spĺňa túto podmienku, tak pre ľubovoľný vektor $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} b_i\boldsymbol{e_i}$ platí

$$f^*(\boldsymbol{u}) = f^*\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\boldsymbol{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i f^*(\boldsymbol{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} b_i k\boldsymbol{e_i} = k\boldsymbol{u},$$

teda ak $\boldsymbol{u} =]X - Y$, tak $\|f(X) - f(Y)\| = |k|\|X - Y\|$. $\square$

Poznámka 17: Z predchádzajúcej vety vidno, že zhodnosti sú špeciálne prípady podobností, a to práve tie, ktoré nazývame nevlastné. Tie už vieme v E_2 a E_3 klasifikovať.

Dôsledok 17 (Vlastné hodnoty podobnosti): Podobnosť s koeficientom k môže mať reálne vlastné hodnoty k alebo $-k$.

Dôkaz: Ak $\boldsymbol{u}$ je vlastný vektor, tak $\|f^*(\boldsymbol{u})\| = \|k\boldsymbol{u}\|$, teda môže platiť iba $f^*(\boldsymbol{u}) = k\boldsymbol{u}$ alebo $f^*(\boldsymbol{u}) = -k\boldsymbol{u}$. (Premyslite si, prečo nemôže mať podobnosť nulový vlastný vektor!) $\square$

Veta 41 (Centrálnosť vlastnej podobnosti): Každá vlastná podobnosť priestoru E_n má práve jeden samodružný bod.

Dôkaz: Nech má naša podobnosť v nejakej karteziánskej sústave súradníc vyjadrenie $\mathbb{Y} = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{R}$. Keďže $k \neq \pm 1$ a reálne vlastné hodnoty sú len $\pm k$, tak $\det(\mathbb{A} - \mathbb{I}) \neq 0$, teda systém rovníc

$$(\mathbb{A} - \mathbb{I})\mathbb{X} = -\mathbb{R}$$

má práve jedno riešenie – hľadaný samodružný bod. $\square$

Teraz sa zameriame na určenie všetkých vlastných podobností priestoru E_2. Keďže každé podobné zobrazenie možno napísať ako kompozíciu rovnoľahlosti a zhodného zobrazenia, budeme vychádzať z klasifikácie zhodností priestoru E_2.

Veta 42 (Klasifikácia podobností priestoru E_2): Priame vlastné podobnosti priestoru E_2 sú zložené z otočenia okolo bodu a následnej rovnoľahlosti so stredom v tomto bode. Nepriame vlastné podobnosti priestoru E_2 sú zložené z osovej súmernosti a rovnoľahlosti so stredom rovnoľahlosti na osi súmernosti.

Dôkaz: Nech O je samodružný bod tejto podobnosti a nech je to počiatok sústavy súradníc. Ak podobnosť je priama, potom ju možno písať v tvare

$$\begin{aligned} x' &= k(x\cos\phi - y\sin\phi) \\ y' &= k(x\sin\phi + y\cos\phi). \end{aligned}$$

Ak rozložíme našu podobnosť na rovnoľahlosť so stredom v počiatku sústavy súradníc a koeficientom k a zhodnosť reprezentovanú príslušnou maticou, tak z vety 33 na strane 26 vyplýva, že musí ísť buď o otáčanie okolo počiatku sústavy súradníc, alebo posunutie. Posunutie však môžeme vylúčiť, pretože O je samodružný bod. Teda každá priama podobnosť roviny je otočenie okolo bodu O o uhol ϕ a následná rovnoľahlosť so stredom v tomto bode a koeficientom k.

Ak podobnosť nie je priama, potom má tvar

$$\begin{aligned} x' &= k(x\cos\phi + y\sin\phi) \\ y' &= k(x\sin\phi - y\cos\phi). \end{aligned}$$

Teda zhodnosť v rozklade musí byť osová súmernosť, a keďže bod O je samodružný, tak os prechádza počiatkom sústavy súradníc. $\square$

Cvičenie 131: Nájdite podobné zobrazenie, ktoré je zložením otočenia o $\frac{\pi}{2}$ okolo bodu $[1, 1]^T$ a rovnoľahlosti so stredom v tom istom bode a koeficientom 3.

Cvičenie 132: Nájdite všetky podobné zobrazenia so samodružným bodom $[2, 1]^T$, ktoré zobrazujú bod $[2, -9]^T$ do bodu $[-2, -2]^T$.

Cvičenie 133: Dokážte, že transformácia roviny $x' = 2x + 5y - 1, y' = -5x + 2y + 4$ je podobnosťou. Určte samodružné body a samodružné smery.

Cvičenie 134: Zobrazenie $h : E_2 \to E_2$ je dané rovnicami $x' = 2x + ay, y' = x + by, z' = y$. Určte koeficienty $a, b \in R$ tak, aby h bolo podobné zobrazenie.

Cvičenie 135: Napíšte rovnice podobnosti, ktorá zobrazuje bod $[1, 1]^T$ do začiatku a začiatok do bodu $[0, 2]^T$. Koľko má úloha riešení?

Cvičenie 136: Nech $ABCD$ je štvorec so stredom S. Ukážte, že existuje podobnosť, ktorá zobrazuje body A, B, S do bodov B, D, C v tomto poradí. Napíšte rovnice tejto podobnosti vzhľadom na vhodne zvolenú sústavu súradníc.

Cvičenie 137: Rozložte podobnosť $x' = 2x - y + 5, y' = x + 2y - 1$ na rovnoľahlosť a zhodnosť.

Cvičenie 138: Určte stred rovnoľahlosti, ktorá je zložená z rovnoľahlosti $x' = 2x + 1, y' = 2y - 1$ a posunutia $x' = x + 3, y' = y$. Skúste skladanie zobrazení zameniť.

Cvičenie 139: Napíšte rovnice rovnoľahlosti zobrazujúcej bod $[2, 0, 3]^T$ do bodu $[1, 0, 0]^T$ a bod $[0, 0, 2]^T$ do bodu $[3, a, b]^T$. Pre ktoré $a, b \in R$ má úloha riešenie?

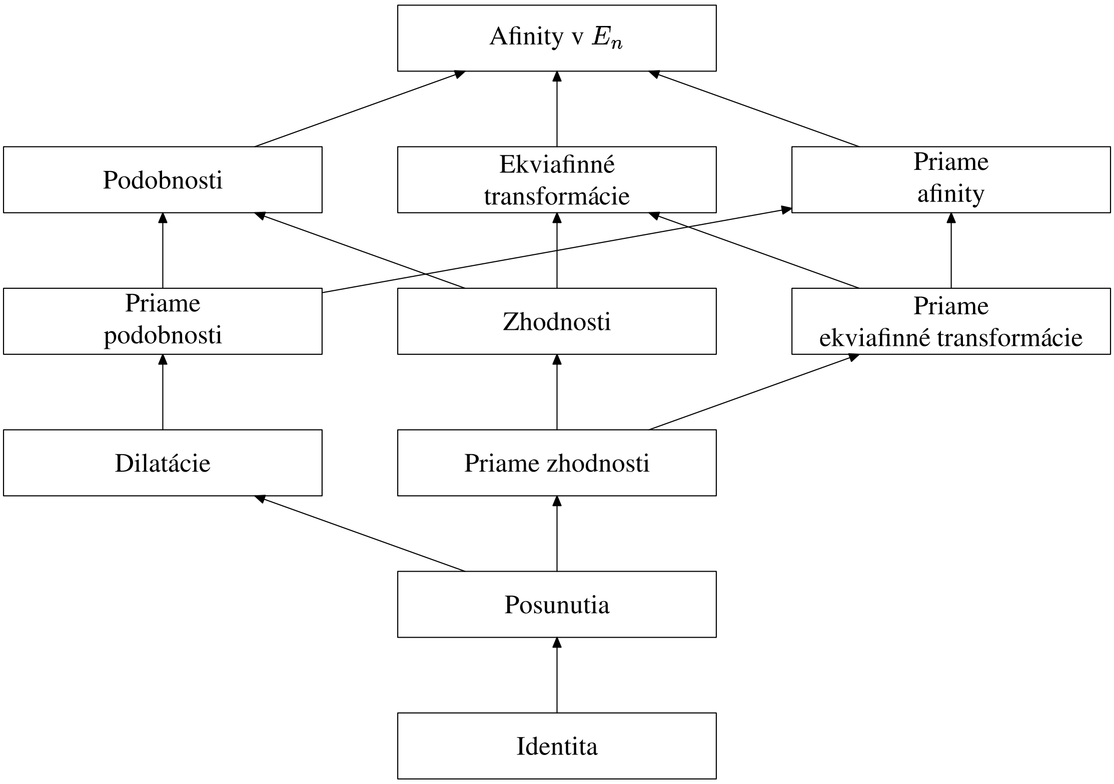
Cvičenie 140: Dokážte, že každá afinná transformácia roviny zachovávajúca smernicu všetkých priamok v rovine má v štandardnej karteziánskej sústave súradníc tvar

$$x' = ax + e$$
$$y' = ax + f$$

Cvičenie 141: Dokážte, že afinná transformácia zobrazujúca trojuholník ABC na trojuholník $A'B'C'$ zobrazuje
a) ťažisko trojuholníka ABC na ťažisko trojuholníka $A'B'C'$
b) ťažnice trojuholníka ABC na ťažnice trojuholníka $A'B'C'$
c) stred vpísanej kružnice trojuholníka ABC na stred vpísanej kružnice trojuholníka $A'B'C'$, ak zobrazenie je podobné
d) stred opísanej kružnice trojuholníka ABC na stred opísanej kružnice trojuholníka $A'B'C'$, ak zobrazenie je podobné

Kapitola 9
Záver

V predchádzajúcich kapitolách sme si ukázali a klasifikovali niektoré afinné zobrazenia afinných priestorov. Klasifikácia samozrejme nebola úplná a vyčerpávajúca. Na obr. 16 si môžete pozrieť ako vyzerá časť štruktúry grupy afinít v E_n. Šípka idúca z obdĺžnika O do obdĺžnika P znamená, že príslušná grupa zobrazení zapísaná v O je podgrupou grupy zobrazení zapísaných v P. Samozrejme, že pre konkrétne n je táto štruktúra omnoho bohatšia. V cvičeniach sa o tom môžete presvedčiť.



Obrázok 16: Časť štruktúry grupy afinít priestoru E_n.

Ďalším pokračovaním tejto cesty by sme sa dostali ku klasifikácii zhodností v E_n a neskôr k projektívnym transformáciám a ich grupám.

Cvičenie 142: Transformácia priestoru E_2 sa nazýva eliptická rotácia, ak má tvar

$$x' = x\cos\alpha - y\frac{1}{s}\sin\alpha$$
$$y' = x\sin\alpha + y\frac{1}{s}\cos\alpha$$

alebo

$$x' = x \cos \alpha + y \frac{1}{s} \sin \alpha$$
$$y' = x \sin \alpha - y \frac{1}{s} \cos \alpha$$

Ukážte, že ak $e \equiv \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{p^2 s^2} = 1$ a $[x, y]^T \in e$, tak aj $[x', y']^T \in e$. Pokúste sa geometricky interpretovať toto zobrazenie.
Cvičenie 143: Transformácia priestoru E_2 sa nazýva hyperbolická rotácia, ak má tvar

$$x' = ax$$
$$y' = \frac{1}{a} y$$

alebo

$$x' = by$$
$$y' = \frac{1}{b} x$$

Ukážte, že ak $h \equiv xy = p$ a $[x, y]^T \in h$, tak aj $[x', y']^T \in h$. Pokúste sa geometricky interpretovať toto zobrazenie.
Cvičenie 144: Transformácia priestoru E_2 sa nazýva parabolická rotácia, ak má tvar

$$x' = d^2 x$$
$$y' = dy$$

Ukážte, že ak $p \equiv y^2 - 2qx = 0$ a $[x, y]^T \in p$, tak aj $[x', y']^T \in p$. Pokúste sa geometricky interpretovať toto zobrazenie.
Cvičenie 145: Nájdite množinu tých afinných transformácií, ktoré majú
a) priamku $x + y + 1 = 0$ bodovo samodružnú
b) priamku $x + y + 1 = 0$ samodružnú Ktoré spomedzi nich sú zhodné a ktoré podobné?
Cvičenie 146: Nájdite všetky afinné zobrazenia, ktoré zobrazia každú kružnicu tvaru $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = r^2$ na seba.
Cvičenie 147: Ukážte, že všetky eliptické a hyperbolické rotácie sú ekviafinné.
Cvičenie 148: Ak f je nepriama zhodnosť roviny, tak $f^2 = I$ alebo f^2 je posunutie. Dokážte!
Cvičenie 149: Ak všetky body P na priamke p sa izometriou roviny zobrazia do všetkých bodov P' priamky p, tak stredy úsečiek PP' sú kolineárne a buď tvoria priamku alebo sú totožné. Dokážte! Pokúste sa zovšeobecniť do E_n.
Cvičenie 150: Dokážte, že posunutá súmernosť (s nenulovým vektorom posunutia v smere roviny súmernosti) má práve jednu samodružnú nadrovinu.
Cvičenie 151: Zloženie troch otočení o uhol π je otočenie o uhol π. Dokážte!
Cvičenie 152: Zloženie troch osových súmerností je osová súmernosť, ak príslušné tri osi súmernosti sú buď rovnobežné alebo majú spoločný práve jeden bod.
Cvičenie 153: Všetky otočenia roviny s pevným stredom tvoria grupu. Dokážte!
Cvičenie 154: Všetky posunutia generované násobkom pevne vybraného vektora tvoria grupu. Dokážte!