Prieniky

Z prienikov útvarov v 2D sa budeme zaoberať prienikom dvoch úsečiek, prienikom úsečky a mnohouholníka a prienikom konvexného a všeobecného mnohouholníka.

Prienik dvoch úsečiek

Uvedieme dva spôsoby určenia prieniku dvoch úsečiek. Prvý spôsob vychádza priamočiaro z parametrického vyjadrenia priamok, na ktorých úsečky ležia, druhý spôsob používa funkciu d na minimalizovanie počtu prípadov, v ktorých je nutný číselný výpočet. V oboch prípadoch budeme uvažovať úsečky AB a PQ nenulovej dĺžky. Priamku, na ktorej leží úsečka AB označme a a priamku, na ktorej leží úsečka PQ označme p.

Prvý spôsob

Parametrické rovnice priamok a a p sú:

$$\begin{aligned} x &= x_A + t(x_B - x_A) \qquad & x &= x_P + s(x_Q - x_P) \\ y &= y_A + t(y_B - y_A) \qquad & y &= y_P + s(y_Q - y_P) \end{aligned}$$

Priamky a, p majú spoločný bod práve vtedy ak má nasledovný systém riešenie:

$$\begin{aligned} t(x_B - x_A) + s(x_P - x_Q) &= x_P - x_A \\ t(y_B - y_A) + s(y_P - y_Q) &= y_P - y_A \end{aligned}$$

Označme determinant systému D:

$$D = \begin{vmatrix} x_B - x_A & x_P - x_Q \\ y_B - y_A & y_P - y_Q \end{vmatrix}$$

Ak $D \neq 0$, priamky a, p sú rôznobežné, je nutné spočítať t alebo s.

$$t = \frac{D_t}{D}, \text{ kde } D_t = \begin{vmatrix} x_P - x_A & x_P - x_Q \\ y_P - y_A & y_P - y_Q \end{vmatrix}$$

$$s = \frac{D_s}{D}, \text{ kde } D_s = \begin{vmatrix} x_B - x_A & x_P - x_A \\ y_B - y_A & y_P - y_A \end{vmatrix}$$

Ak $t \in < 0, 1 >$ (resp. $s \in < 0, 1 >$) majú spoločný bod aj úsečky AB, PQ a pomocou tohoto parametra vieme aj jeho súradnice.

Ak $D = 0$, priamky a, p sú totožné, alebo rôzne ale rovnobežné.

Ak $D = 0$ a $D_t \neq 0$, (resp. $D_s \neq 0$) priamky a, p sú rovnobežné, ale nie totožné, úsečky AB, PQ teda nemajú spoločný bod.

Ak $D = 0$ a $D_t = 0$, (resp. $D_s = 0$) priamky a, p sú totožné. Prienikom úsečiek AB, PQ je alebo prázdna množina alebo úsečka (možno nulovej dĺžky). Ktorý prípad nastal, zistíme podľa parametrov t_P a t_Q. t_P je také aby $P = A + t_P(B - A)$. t_Q je také aby $Q = A + t_Q(B - A)$. Nasleduje tabuľka, v ktorej sú uvedené jednotlivé možnosti. Stĺpce sú pre hodnoty t_Q, riadky pre hodnoty t_P.

	$(-\infty, 0)$	$< 0, 1 >$	$(1, \infty)$
$(-\infty, 0)$	$\emptyset$	AQ	AB
$< 0, 1 >$	AP	PQ	PB
$(1, \infty)$	AB	QB	$\emptyset$

Druhý spôsob

Funkcia $d(A, B, C) = x_A(y_B - y_C) + y_A(x_C - x_B) + x_B y_C - y_B x_C$ nadobúda rôzne znamienko podľa toho, či bod A leží v jednej, alebo v druhej polrovine určenej priamkou BC. Ak teda $d(A, P, Q).d(B, P, Q) < 0$ priamka PQ oddeľuje body A, B.

Budeme vyšetrovať hodnoty:

$$\begin{array}{rclcrcl} s_A & = & d(A, P, Q) & \qquad & s_P & = & d(P, A, B) \\ s_B & = & d(B, P, Q) & \qquad & s_Q & = & d(Q, A, B) \end{array}$$

Ak $s_A.s_B > 0$ alebo $s_P.s_Q > 0$ úsečky AB, PQ nemajú spoločný bod.
Prípad $s_A.s_B \leq 0$ a súčasne $s_P.s_Q \leq 0$ je možné rozdeliť nasledovne:

- $s_A = 0$ a $s_B \neq 0$ potom prienik úsečiek AB, PQ je bod A
- $s_B = 0$ a $s_A \neq 0$ potom prienik úsečiek AB, PQ je bod B
- $s_P = 0$ a $s_Q \neq 0$ potom prienik úsečiek AB, PQ je bod P
- $s_Q = 0$ a $s_P \neq 0$ potom prienik úsečiek AB, PQ je bod Q
- $s_A = 0$ a $s_B = 0$ resp. ($s_P = 0$ a $s_Q = 0$) potom úsečky AB, PQ ležia na jednej priamke a ich prienik zistíme pomocou rovnakej tabuľky ako v prvom spôsobe
- všetky hodnoty s sú nenulové, prienik úsečiek AB, PQ je ich vnútorný bod a jeho súradnice vypočítame napríklad ako v prvom spôsobe

Úlohy

1. Porovnajte počet a typ aritmetických operácií oboch spôsobov.
2. Pokúste sa popísať v čom spočívajú výhody druhého spôsobu.

Prienik úsečky a mnohouholníka

Uvažujme úsečku PQ a regulárny, kladne orientovaný mnohouholník $A_0 A_1 \ldots A_n$. Označme $s_i = d(A_i, P, Q)$.

Ak sú všetky znamienka s_i rovnaké a nenulové, úsečka a mnohouholník nemajú spoločný bod.

Ak $s_i = 0$ a $s_{i-1} \neq 0$, $s_{i+1} \neq 0$, je nutné zistiť polohu bodu A_i vzhľadom na úsečku PQ. Ak A_i leží medzi P, Q, bod A_i patrí do prieniku úsečky a mnohouholníka.

Ak sú s_i a s_{i+1} rovné nule, je nutné zistiť polohu bodov A_i a A_{i+1} vzhľadom na úsečku PQ. Do prieniku úsečky a mnohouholníka potom bude patriť úsečka alebo prázdna množina.

Zaoberajme sa ďalej prípadom, že úsečka PQ pretne dve rôzne hrany A_iA_{i+1}, A_jA_{j+1}.

Označme:

$$\begin{aligned} u_1 &= d(P, A_i, A_{i+1}) & \qquad u_3 &= d(Q, A_i, A_{i+1}) \\ u_2 &= d(P, A_j, A_{j+1}) & \qquad u_4 &= d(Q, A_j, A_{j+1}) \end{aligned}$$

Môžu nastať tieto prípady (je ich možné charakterizovať pomocou súčinov $u_{12} = u_1u_2, u_{34} = u_3u_4, u_{13} = u_1u_3$):

- oba body P, Q ležia vnútri mnohouholníka, hľadaným prienikom je celá úsečka PQ ($u_{12} \geq 0, u_{34} \geq 0, u_{13} \geq 0$)
- oba body P, Q ležia mimo mnohouholníka, hľadaným prienikom je prázdna množina ($u_{12} < 0, u_{34} < 0, u_{13} \geq 0$)
- oba body P, Q ležia mimo mnohouholníka, hľadaným prienikom je časť úsečky PQ, treba spočítať dva prieniky ($u_{12} < 0, u_{34} < 0, u_{13} < 0$)
- jeden z bodov P, Q leží vnútri mnohouholníka, druhý mimo, hľadaným prienikom je časť úsečky PQ, treba spočítať jeden prienik

Úloha

Overte správnosť určenia znamienok u pre jednotlivé prípady.

Prienik polroviny a mnohouholníka

Problém zistenia prieniku konvexného a všeobecného mnohouholníka je možné redukovať na zisťovanie prieniku polroviny a mnohouholníka. Konvexný mnohouholník je totiž prienikom polrovín.

Nech je daná polrovina určená orientovanou priamkou PQ a regulárny, kladne orientovaný mnohouholník $A_0A_1 \ldots A_n$. Označme $s_i = d(A_i, P, Q)$.

Prienik mnohouholníka s polrovinou získame tak, že vytvoríme zoznam tých vrcholov mnohouholníka, ktoré ležia v polrovine. Tento zoznam potom rozdelíme na potrebný počet mnohouholníkov.

Skúmajme vždy hranu A_iA_{i+1} a podľa znamienok s_i, s_{i+1} rozhodnime, či do zoznamu vrcholov pridáme koncový bod hrany, bod prieniku hrany s hraničnou priamkou roviny (označujeme ho C), oba, prípadne ani jeden. Na jednoznačné rozhodnutie, je v niektorých prípadoch nutné zvážiť aj znamienko s_{i+2}.

Klasifikácia hrán je zhrnutá v nasledovnej tabuľke.

s_i	s_{i+1}	poloha hrany	do zoznamu sa pridáva
$+$	$+$	vnútri	A_{i+1}
$+$	0	vnútri	A_{i+1}
$+$	$-$	vychádza	C
0	$+$	vchádza, A_i na hranici	A_{i+1}
0	0	celá na hranici	A_{i+1} ak $s_{i+2} > 0$, inak $\emptyset$
0	$-$	mimo, A_i na hranici	$\emptyset$
$-$	$+$	vchádza	C, A_{i+1}
$-$	0	A_{i+1} na hranici	A_{i+1} ak $s_{i+2} > 0$, inak $\emptyset$
$-$	$-$	mimo	$\emptyset$

Pri takto vytvorenom zozname leží na hraničnej priamke polroviny párny počet bodov z tohoto zoznamu. Tieto body je nutné usporiadať vzhľadom na hraničnú priamku polroviny a vytvoriť z nich dvojice. Ostatné body zoznamu sa pospájajú v prirodzenom poradí, tak ako ako boli do zoznamu pridávané. Takto sa vytvorený zoznam rozpadne na príslušný počet mnohouholníkov.

Poznamenajme ešte, že prienik dvoch nekonvexných mnohouholníkov je možné získať tiež pomocou prieniku mnohouholníka a polroviny, jeden z nekonvexných mnohouholníkov je však najprv nutné rozdeliť na mnohouholníky konvexné.

Použitá literatúra

1. Ružický, E. - Ferko, A. 1995. Počítačová grafika a spracovanie obrazu. 1995. ISBN 80-967180-2-9. Bratislava: SAPIENTIA 1995.

2. Žára, J. a kol. 1998. Moderní počítačová grafika. ISBN 80-7226-049-9. Computer Press 1998

3. Juraj Štugel, www.pg.miesto.sk