# ALGEBRA

## P1

**Def** Nech $\varphi$: V(F)$\to$W(F) je lin. zobr., potom

a) **Jadrom** l. z. $\varphi$ nazyvame množinu Ker $\varphi$ = J$\varphi$ = $\{\alpha\in V(F), \alpha\varphi=\emptyset\}$

b) **Obrazom** l. z. $\varphi$ nazyvame množinu Im $\varphi$ = O$\varphi$ = $\{\beta\in W(F), \exists\ \alpha\in V(F), \alpha\varphi = \beta\}$

**Lema** Nech $\varphi$: V(F)$\to$W(F) je lin. zobr., potom J$\varphi$ je vektorový podpriestor vekt. priestoru V(F)a O$\varphi$ je vektorový podpriestor vekt. priestoru W(F).

**Veta** Nech V(F) je n-rozmerný vektorový priestor a $\varphi$: V(F)$\to$W(F) je lineárne zobrazenie, potom DIM(J$\varphi$)+DIM(O$\varphi$)=n.

**Dôsledok** Nech A je matica nad poľom F, potom $h(A)=h(A^T)$.

## Skalárne súčiny a euklidovské priestory.

**Def** Nech V(R) je vektorový priestor nad poľom reálnych čísel, potom funkciu g: V(R)x V(R)$\to$ R nazveme **skalárnym súčinom**, ak

1) $\forall\alpha,\beta\in V(R)$, $(\alpha,\beta)g=(\beta,\alpha)g$
2) $\forall\alpha,\beta,\gamma\in V(R)$, $(\alpha,\beta+\gamma)g=(\alpha,\beta)g+(\alpha,\gamma)g$
3) $\forall\alpha,\beta\in V(R),\forall c\in R$, $(c\alpha,\beta)g=c(\alpha,\beta)g$
4) $\forall\alpha\in V(R)$, $(\alpha,\alpha)g\geq 0 \wedge (\alpha,\alpha)g=0 \Leftrightarrow \alpha=\emptyset$.

## P2

**Lema** (Schwarz-Cauchy Bulakovská) Nech g je skalárny súčin vo vektorovom priestore V(R), potom $\forall\alpha,\beta\in V(R)\ |\ (\alpha,\beta)g\ |\ \leq \sqrt{(\alpha,\alpha)g} * \sqrt{(\beta,\beta)g}$.

**Def** Nech g je skalárny súčin vo vektorovom priestore V(R) a nech $\alpha,\beta\in$ V(R), potom **dĺžkou vektora $\alpha$** v skalárnom súčine

g nazývame císlo $\|\alpha\|_g = \sqrt{(\alpha,\alpha)g}$. Ak $\alpha \neq \emptyset$, $\beta \neq \emptyset$ tak hovoríme, že $\varphi\in$ <0,pí> je uhol medzi vektormi $\alpha$, $\beta$ ak $\cos\varphi= ((\alpha,\beta)g)/(\|\alpha\|_g *\|\beta\|_g)$.

**Def** Nech g je skalárny súčin vo vektorovom priestore V(R), potom $\alpha,\beta\in$ V(R) nazývame **kolmé vektory**, ak $(\alpha,\beta)g=0$ $(\alpha\perp\beta)$

**Veta** Nech g je skalárny súčin vo vektorovom priestore V(R), potom platí

a) $\forall\alpha\in V(R),\forall c\in R\ \|c.\alpha\|_g = c\ .\ \|\alpha\|_g$,
b) $\forall\alpha\in V(R)$, $\|\alpha\|_g \geq 0$ ak $\alpha\neq 0$,
c) $\forall\alpha,\beta\in V(R)$, $|(\alpha,\beta)g| \leq \|\alpha\|_g * \|\beta\|_g$,
d) $\forall\alpha,\beta\in V(R)$, $\|\alpha+\beta\|_g \leq \|\alpha\|_g + \|\beta\|_g$, (Trojuholníková nerovnosť)

**Def** A k g je skalárny súčin na vektorovom priestore E, hovoríme, že (E,g) je **Euklidovský priestor**.

**Def** Nech (E,g) je Euklidovský priestor.Nech M je podmnožina E. Potom **ortogonálnym doplnkom množiny M** nzývame množinu $M^\perp=\{\alpha\in E, \forall\beta\in M \text{ je } \alpha\perp\beta\}$.

**Veta** Nech (V(R),g) je Euklidovský priestor. Nech M, N sú podmnožiny E a S, T sú podpriestory V(R), potom

a) $M^\perp$ je podpriestor vektorového priestoru E,
b) ak $M\subseteq N$, tak $N^\perp \subseteq M^\perp$,
c) $(S+T)^\perp= S^\perp \cap T^\perp$.

**Def** Vektory $\alpha1, \alpha2,..., \alpha n$ z euklidovského priestoru (E,g) nazývame **ortogonálne**, ak $\forall i,j\in N$ platí $(\alpha i,\alpha j)g=0$, $i\neq j$.

**Veta** Nech $\alpha1, \alpha2,..., \alpha n$ sú nenulové ortogonálne vektory v euklidovskom priestore (E,g), potom $\alpha1, \alpha2,..., \alpha n$ sú LN.

**Def** Nech (E,g) je euklidovský priestor $\wedge$ $\alpha1, \alpha2,..., \alpha n \in$ E, hovoríme, že $\alpha1, \alpha2,..., \alpha n$ sú **ortonormálne** ak

$\forall i,j\in N$ platí $(\alpha i,\alpha j)g=0$ ak $i\neq j$

=1 ak i=j. Ak ortonormálne vektory $\alpha1, \alpha2,..., \alpha n$ tvoria bázu (E,g), tka hovoríme, že

$\alpha1, \alpha2,..., \alpha n$ tvoria **ortonormálnu bázu**.

**Veta** (Gramov- Schmidtov ortogonalizačný proces) Nech u1, u2, ..., uk sú LN, potom existujú ortonormálne vektory v1, v2, ..., vk, tké, že [u1]=[v1]

[u1, u2]=[v1, v2]

...

[u1, u2, u3, ...,uk ]=[v1, v2, v3, ..., vk].

**Dôsledok** Nech (E,g) je euklidovský priestor. Nech S je konečnorozmerný podpriestor (E,g),$\alpha\in$E, potom existujú vektory $\beta\in S$ a $\gamma\in S^\perp$ t aké, že $\alpha=\beta+\gamma$.

**Veta** Nech (E,g) je euklidovský priestor. Nech S je konečnorozmerný podpriestor (E,g), potom

a) $E=S\oplus S^\perp$,
b) Ak E je konečnorozmerný,potom $(S^\perp)^\perp=S$,
c) Ak E je konečnorozmerný a T je podpriestor E, potom $S^\perp+T^\perp=(S+T)^\perp$.

Veta Nech (E,g) je euklidovský priestor. Nech $\beta1, \beta2, ..., \beta n$ je báza pristoru E. Nech $\delta$, $\gamma$ sú ľubovoľé vektory z E, nech

$\delta = d1\beta1+ ...+ dn\beta n$, $\gamma = c1\beta1+ ...+cn\beta n$. Potom $(\gamma, \delta)g = c1d1+ ...+cndn$ práve vtedy, keď $\beta1, \beta2, ..., \beta n$ je ortonormálna báza pristoru E.

Veta Báza $\alpha1, \alpha2, ..., \alpha n$ je ortonormálna práve vtedy, keď

$(c1\alpha1+ c2\alpha2+ ...+ cn\alpha n, d1\alpha1+ d2\alpha2+ ...+ dn\alpha n)g = c1d1+ c2d2+ ...+ cndn$.

Def Euklidovské priestory (E,g) a (E´,g´) sa nazývajú izomorfné, ak existuje zobrazenie $\varphi : E \rightarrow E'$ také, že $\varphi$ je izomorfizmom

vektorových priestoorov E a E´a pre každé $\alpha, \beta \in E$ sa $(\alpha, \beta)g = (\alpha\varphi, \beta\varphi)g'$.

Veta Dva konečnorozmerné euklidovské priestory sú izomorfné práve vtedy, keď majú rovnakú dimenziu.

## Kvadratycké formy

Def Kvadratycká forma premenných x1, x2, ..., xn nad poľom F je zobrazenie typu

$x = (x1, x2, ..., xn) \rightarrow (\Sigma i,j : 1 \text{ po } n)\ aij.xi.xj$, ????

Veta ...????

Veta (Jaccobi, Lagrangue) Nech $\Sigma\ aij.xi.xj$ je kvadrtatycká forma nad poľom F (t. j. , $aij \in F$) pričom v F platí $1+1\neq0$.

Potom existuje substitúcia $z1 = pi1\ x1 + ...+ pin\ Xn$ také, že $\Sigma\ aij.xi.xj = z1^2+ ...+ zi^2 - z(i+1)^2 - ...- zr^2$.

Metóda „prevodu“ formi $\Sigma\ aij.xi.xj$ na tvar $z1^2+ ...+ zi^2 - z(i+1)^2 - ...- zr^2$ pomocou doplňovania na úplný štvorec sa nazýva Lagrangeova metóda.

Veta (Sylvesterov zákon zotrvačnosti ) $\Sigma\ aij.xi.xj$ je kvadratycká forma nad poľom F $(1+1\neq0)$. Nech Q, R sú dve substitúcie

(t. j. $Y = X.Q$, $Z = X.R$ ), také, že $\Sigma\ aij.xi.xj = y1^2+ ...+ yi^2 -yz(i+1)^2 - ...- yr^2 = z1^2+ ...+ zi^2 - z(i+1)^2 - ...- zq^2$.

Potom $i = j$ , $r = q$. (<-- vyjde rovnaký počet núl respektýve jednotiek na diagonále pri oboch substitúciach) .

Def Hovoríme, že kvadratycká forma $g(x1, ..., xn) = \Sigma\ aij.xij$ , alebo symetrická matica $A = \|aij\|_{nxn}$ je

a) kladne definitná ak pre $X = (x1, ..., xn) \neq \emptyset$ je $g(x) > 0$ , prípadne $X A X^T > 0$ ,
b) kladne semidefinitná ak pre $X = (x1, ..., xn)$ je $g(x) \geq 0$ , prípadne $X A X^T \geq 0$ ,
c) záporne definitná ak $g(x) < 0$ , $X A X^T < 0$ak $X\neq\emptyset$ ,
d) záporne smidefinitná ak $g(x) \leq 0$ , $X A X^T \leq 0$ .

Veta