Skúška z algoritmov vyzerá nasledovne:

▷ písomka — dve hodiny, 10 príkladov

▷ pošle vás domov, udá termín vysledkov

▷ o jeden–dva dni sú výsledky — posedenie u neho v kancelárii, vidíte obodovanú písomku, nestačíte sa čudovať, koľko máte bodov (viac ako si myslíte), krátky priateľský rozhovor (od témy) a zapisaná známka.

(1) Dokaz vetu: $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = O(g(n)) \bigwedge f(n) = \Omega(g(n))$

(1) Nech $f(n), g(n)$ su asymptoticky nezaporne fcie. Pomocou zakladnej definicie theta-notacie dokazte, ze

$$\max f(n), g(n) = \Theta(f(n) + g(n))$$

(8 bodov)

(1) Uvažuj problém zisťovania, či ľubovoľná postupnosť $< x_1, \ldots, x_n >$ n čísiel obsahuje opakovaný výskyt nejakého čísla. Ukáž, že existuje algoritmus, ktorý to zistí v čase $\Theta(n \lg n)$.

(1) Vysvetli, prečo výrok „Čas výpočtu algoritmu A je minimálne $O(n^2)$" nemá zmysel.

(2) Pouzi master theorem na $T(n) = 4T(n/2) + n^3$

(2) Ukazte (pomocou substitucnej metody), ze riesenie $T(n) = 2T(n/2) + n$ je $\Omega(n \lg n)$. Mozno z toho urobit zaver, ze riesenie je $\Theta(n \lg n)$?

(2) Pouzite metodu master theorem (hlavna veta) na zistenie tesnych asymptotickych ohraniceni pre rekurenciu

$$T(N) = 4T\frac{n}{2} + n^2$$

(10 bodov)

(2) Nájdi riešenie rekurentnej rovnice

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1$$

použitím zmeny premennejô netrápa sa teraz tým, čí sú argumenty celé čísla.

(2) Ukáž, že riešenie rekurentnej rovnice

$$T(n) = 2T(\lfloor x/2 \rfloor + 17) + n$$

je $O(n \lg n)$, pomocou substitučnej metódy.

(2) Nech čas výpočtu algoritmu je popísaný rekurentne vzťahom $T(n) = 7T(n/2) + n^2$. Konkurenčný algoritmus A' má čas výpočtu popísaný vzťahom $T(n) = aT(n/4) + n^2$. Nájdite najväčšie celé číslo a také, aby bol algoritmus A' asymptoticky rýchlejší než algoritmus A.

(3) Dokaz, ze heapsort je $\Omega(n \lg n)$

(3) Kde v halde može spočívať najmensi prvok?

(3) Ukážte, že najväčší prvok v podstrome haldy leží v koreni tohto podstromu.

(3) Ukazte, ze cas vypoctu algoritmu HEAPIFY je v najhorsom pripade $\Omega(\lg n)$. (Pomoc: Pre haldu s n uzlami zadaj take hodnoty uzlov, ktore sposobia, ze HEAPIFY bude volane rekurzivne v kazdom uzle na ceste od korena k listu.) *(10 bodov)*

(4) Dokaz, ze COUNTING-SORT je stabilne triedenie.

(4) $h(k) = k$ mod 9, kolizie zretazenim. Ukazte vkladanie klucov $5, 28, 19, 15, 20, 33, 12, 17, 10$

(4) Cas vypoctu algoritmu quicksort je mozne v praxi vylepsit, ak vezmeme do uvahy, ze insertsort triedi velmi rychlo postupnosti, ktore su uz „skoro"utriedene. Ak volame quicksort na podpoli s mensim poctom prvkov nez k prvkov, tak ich nechame nezmenene a vratime sa bez triedenia. Ked skonci praca alg. quicksort, tak spustime alg. insertsort na ukoncenie triedenia. Zdovodnite, ze ocakavany cas vypoctu tohto triediaceho algoritmu je O(nk + n log(n/k)). Ako vybrat vhodne k teoreticky a prakticky? *(10 bodov)*

(4) Popíš algoritmus, ktorý ma na vstupe n celých čísel z intervalu $< 1 \ldots k >$, tieto čísla predspracuj, aby si potom mohol dať odpoveď na ľubovoľnú otázku typu: „Koľko z n celých čísel padne do intervalu $< a \ldots b >$?" v čase $O(1)$. Tento algoritmus by mal fázu predspracovania spočítať v čase $O(n + k)$

(5) Ktoré z nasledujúcich triediacich algoritmov sú stabilné: insertsort, mergesort, heapsort, quicksort a countingsort? Načrtni jednoduchý spôsob, ako urobiť ľubovoľné triedenie stabilným.

(5) Implementuj dva zasobniky v jednom poli s casmi $O(1)$

(5) Napiste nerekurzivnu proceduru pracujucu v case $O(n)$, ktora pre dany n uzlovy binarny strom vypise hodnotu kazdeho kluca (pouzit zasobnik).

(5) Nech $a =< a_0, a_1, ..., a_r >$ oznacuje postupnost $r+1$ prvkov vybratych nahodne z mnoziny {0, 1, …, m-1}. Definujme prislusnu hasovaciu funkciu $ha \in H$

$$ha(x) = \sum_{i=0}^{r} (a_i x_i) \; mod \; m \qquad (*)$$

kde $x =< x_0, x_1, ..., x_r >$ je rozpis x do $r+1$ bitovych retazcov rovnakej dlzky. Ukazte, ze ak bude kazda zlozka $a_i \in a$ v rovnici (*) rozna od nuly, potom mnozina H z definicie

$$H = \bigcup_a (ha)$$

nie je univerzalna. *(12 bodov)*

(5) Ukážte, ako utriediť n celých čísiel z intervalu $< 1 \ldots n^2 >$ v čase $O(n)$.

(5) Zostroj BF=strom k lesu F=$\{2-1-3, 5-4-6, 8-7-9\}$

(6) Nakresli postupnosť medzivýsledkov na ilustráciu operácie QUICK-SORT aplikovanej na pole $A =< 5, 3, 17, 10, 84, 19, 6, 22, 9 >$

(6) Uvazujme metodu delenia pri hasovani zretazenim, kde $h(k) = k \; mod \; m$, kde $m = 2^{p-1}$ a k je znakovy retazec interpretovany v ciselnom zaklade 2^p. Ukaz, ze ak retazec x moze byt odvodeny z retazca y permutaciou jeho znakov, potom sa x a y hasuju na tu istu poziciu. Ukaz priklad aplikacie, kedy tato vlastnost hasovacej funkcie je nanajvys nevhodna.

(6) Bol nakresleny RB-strom. Ukazat postupne vymazavanie vsetkych vrcholov v danom poradi.

(6) Prehladavanie BP-stromu metodou INORDER mozno vykonat tak, ze najdeme minimalny prvok pomocou algoritmu TREE-MINIMUM a potom pouzitim $n-1$ volani algoritmu TREE-SUCCESSOR. Dokazte, ze tento algoritmus bezi v case $\Theta(n)$. *(9 bodov)*

(6) Profesor Bunyan si myslí, že objavil významnú vlastnosť BP=stromu. Predpokladajme, že pri hľadaní kľúča skončíme v liste. Uvažujme tri množiny:
  A kľúče ležiaco vľavo od prehľadávacej cesty,
  B kľúče ležiaco na prehľadávacej ceste,
  C kľúče ležiaco vpravo od prehľadávacej cesty.
Profesor Bunyan tvrdí, že pre ľubovoľné tri kľúče $a \in A, b \in B, c \in C$ musí platiť nerovnosť

$$a \leq b \leq c.$$

Buď dokážeš, že platí tvrdenie prof. Bunyana, alebo ukážeš čo najmenší kontrapríklad k tvrdeniu prof. Bunyana.

(6) Ukáž, že ak $|U| > nm$, potom existuje podmnožina nožiny U, ktorej veľkosť je n a má tú istú nasledujúcu vlastnosť: všetky jej kľúče sa hašujú na tú istú pozíciu v hašovacej tabuľke, takže najhorší čas pre vyhľadávanie pri hašovaní so zreťazením je $\Theta(n)$.

(7) Využi vlastnosť BP-stromu na rigorózny (presný) dôkaz toho, že kód algoritmu TREE-SUCCESSOR je správny.

(7) Casy vypoctu algoritmu, ktory cisla najskor insertuje do binarneho stromu a potom ich vypise v usporiadanom poradi (inorder) v najlepsom a najhorsom pripade.

(7) Najdite optimalne uzatvorkovanie sucinu maticoveho retazca, ktoreho postupnost rozmerov je $\langle 15, 12, 40, 25, 7, 30, 10 \rangle$. *(10 bodov)*

(7) Načrtnite úplný binárny prehľadávací strom výšky 3, s kľúčmi $(1, 2, \ldots, 15)$ pridejte listy NIL a zafarbite uzly troma rôznymi spôsobmi (farbami black & red) tak, aby čierne výšky výsledných RB=stromov boli 2, 3, 4.

(8) Dokaz, ze v matrix-chain-order algoritme je

$$\sum_{i,j=1}^{n} R(i,j) = \frac{n^3 - n}{3}$$

vyuzitim $\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$. $R(i,j)$ je pocet odvolani sa na miesto tabulky (i,j)

(8) Popiste datovu strukturu, ktora bude vbysledkom po absorbovani cervenych deti do ich ciernych rodicov v RB-strome, pricom cierny rodicia akceptuju za svoje: deti svojich cervenych deti (podla mojho skromneho nazoru to bude B-strom).

(8) Dokazte, ze zlomkovy problem batohu ma vlastnost greedy vyberu. *(8 bodov)*

(8) Vyslov a dokáž vetu o optimálnej podštruktúre problému LCS (najdlhšej spoločnej podpostupnosti).

(9) Nie kazdy greedy pristup k problemu vyberu aktivit nam dava najvacsiu mnozinu vzajomne kompatibilnych aktivit. Ukaz priklad, kedy vyber aktivit na zaklade najkratsieho trvania z tych, ktore su kompatibilne s predchadzajucimi nefunguje.

(9) Dokazte, ze pri optimalnom kode, ak su znaky usporiadane tak, ze ich frekvencie su nerastuce, potom dlzky ich kodov su v nerastucom poradi.

(9) Aký je optimálny Huffmanov kód pre nasledujúcu postumnosť frekvencií. Ukáž postup.

$$a:4, b:7, c:24, d:12, e:20, f:80, g:120, h:100$$

(9) Aký je optimálny Huffmanov kód pre nasledujúcu postumnosť frekvencií. Ukáž postup.

$$a:12, b:40, c:15, d:8, e:25$$

(9) Zostrojte RB-strom, ktory bude vysledkom po postupnom vkladani klucov 87, 93, 58, 129, 27, 81, 138, 72 do povodne prazdneho RB-stromu. *(10 bodov)*

(9) Zostrojte RB-strom, ktorý bude výsledkom po postupnom vkladaní kľúčov 17, 41, 38, 21, 12, 19, 8, 35, 10 do povodne prazdneho RB-stromu. *(10 bodov)*

(10) PREMIA priklady rekurencii:

$$T(n) = 16T\frac{n}{4} + n^2$$

$$T(n) = 7T\frac{n}{3} + n^2$$

$$T(n) = T(n-1) + n$$

$$T(n) = 2T\sqrt{n} + 1$$

(10) PREMIA - PRIKLADY REKURENCII

Odvodte asymptoticky horne a dolne ohranicenia pre $T(n)$ v kazdej z nasledujucich rekurentnych rovnic. Predpokladajme, ze $T(n)$ je konstanta pre $n \leq 2$. Najdite co najtesnejsie ohranicenia a zdovodnite vase riesenie:

$$T(n) = 7T\frac{n}{2} + n^2$$

$$T(n) = 2T\frac{n}{4} + \sqrt{n}$$

$$T(n) = T(n-1) + \lg n$$

$$T(n) = \sqrt{n} * T(\sqrt{n}) + n$$

(13 bodov)

(10) PRÉMIA - UTRIEDENIE PODĽA ASYMPTOTICKÝCH RASTOVÝCH KRITÉRIÍ

Zoraďte nasledujúce funkcie podľa rádu rastu: t. j. nájdite usporiadanie $g_1, g_2, \ldots, g_16$ také, že platí $g_1 = \omega(g_2), g_2 = \omega(g_3), \ldots, g_16 = \omega(g_16)$. Rozdeľte váš zoznam na triedy ekvivalencie také, že $f(n)$ a $g(n)$ patria do tej istej triedy ekvivalencie, keď $f(n) = \Theta(g(n))$

$n^{\lg\lg n}$	$\ln n$	1	$n^{1/\lg n}$
$2^{\lg n}$	$(\lg n)^{\lg n}$	e^n	$4^{\lg n}$
$(n+1)!$	$\lg n$	$\lg^*(\lg n)$	$2^{\sqrt{2\lg n}}$
n	2^n	$n \lg n$	$2^{2^{n+1}}$

(10) PRÉMIA - INVERZIE

Nech $A[1\ldots n]$ je pole n rôznych prvkov. Ak platí $i < j$ a $A[i] > A[j]$, potom sa dvojica (i,j) nazýva inverzia v A.

a) Vypíšte 5 inverzií poľa $< 2, 3, 8, 6, 1 >$

b) Ktoré pole s prvkami množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ má najviac inverzií? Koľko ich má?

c) Aký je vzťah medzi časom výpočtu INSERTION-SORT a počtom inverzií vo vstupnom poli?
d) Zostroj algoritmus, ktorý určí počet inverzií v ľubovoľnej permutácii n prvkov s časom výpočtu $O(n \lg n)$ v najhoršom prípade. (Hint: Modifikuj MERGE-SORT)

P.S.: radsej si nacvicte pracu s tymi ... RB-stromami, aby vas to nezdrzovalo.

Nebolo to az take tazke tazke, ale casovo pomerne narocne, tak sa na to pripravte. Napriklad pri siestich maticiach je MATRIX-CHAIN v case $O(n^3)$...