Cvičenie 1.1. Ako by ste vyjadrili implikáciu $A \Rightarrow B$ pomocou výrokov A, B a logických spojok AND, OR, NOT?

Cvičenie 1.2. Dokážte matematickou indukciou vzťahy:

- $\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$.
- $\sum_{i=1}^{n} i^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$ pre $n \geq 2$.
- $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ pre $n > 1$.

Cvičenie 1.3. Dokážte matematickou indukciou Moivreovu vetu: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$, i je imaginárna jednotka, $i^2 = 1$.

Cvičenie 1.4. Niekedy je možné použiť indukciu späť dokázaním, že z n vyplýva $n-1$ a naopak. Napríklad, uvažujme tvrdenie

$$P(n) : x_1 \ldots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^n, \text{ ak } x_1, \ldots, x_n \geq 0.$$

Je to zrejme pravda pre $n = 2$.

a) Dokážte, že $P(n)$ implikuje $P(n-1)$ pre $n > 1$ voľbou $x_n = (x_1 + \ldots + x_{n-1})/(n-1)$.

b) Ukážte, že $P(n)$ a $P(2)$ implikuje $P(2n)$.

c) Vysvetlite, prečo toto všetko implikuje, že $P(n)$ platí pre všetky n.

Cvičenie 1.5. Zistite, či pre implikáciu a ekvivalenciu platia asociatívny a komutatívny zákon.

Cvičenie 1.6. Nech $A(x)$, $B(x)$ sú ľubovoľné výrokové formy. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich kvantifikovaných výrokov sú tautológie a ktoré nie. V prípade, že sa nejedná o tautológiu, uveďte príklady výrokových foriem $A(x)$, $B(x)$ dokazujúcich, že sa nejedná o tautológiu.

1. $\forall x\,[A(x) \Rightarrow B(x)] \Rightarrow [\forall\, A(x) \Rightarrow \forall x\, B(x)]$
2. $\exists x\,[A(x) \Rightarrow B(x)] \Rightarrow [\forall\, A(x) \Rightarrow \exists x\, B(x)]$
3. $[\forall\, A(x) \Rightarrow \forall x\, B(x)] \Rightarrow \forall x\,[A(x) \Rightarrow B(x)]$
4. $[\forall\, A(x) \Rightarrow \forall\exists x\, B(x)] \Rightarrow \exists x\,[A(x) \Rightarrow B(x)]$
5. $\forall x\, A(x) \rightarrow \exists x\, A(x)$
6. $\exists x\, A(x) \rightarrow \forall x\, A(x)$
7. $\exists x\,[A(x) \rightarrow B(x)] \Rightarrow [\exists x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, B(x)]$
8. $\forall x\,[A(x) \rightarrow B(x)] \Rightarrow [\exists x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, B(x)]$

Cvičenie 1.7. Presvedčte sa o platnosti pravidiel Modus ponens a pravidla sylogizmu pomocou pravdivostnej tabuľky.

Cvičenie 1.8. Vyjadrite každú z logických spojok konjunkcia, disjunkcia a negácia pomocou zvyšných dvoch.

Cvičenie 1.9. Zapíšte symbolicky nasledujúce výroky a znegujte ich:

a) pre každé dve prirodzené čísla existuje aspoň jedno prirodzené číslo x tak, že platí $a + x = b$;

b) pre každé dve prirodzené čísla a, b spĺňajúce podmienku $a < b$ existuje aspoň jedno prirodzené číslo x, pre ktoré platí $a < x$ a $x < b$;

c) existuje aspoň jedno reálne číslo x, ktoré je nenulové a jeho druhá mocnina je nekladná;

d) pre každé reálne číslo x platí: ak je nenulové, potom jeho druhá mocnina je kladná.

Cvičenie 1.10. Udajte množinu M a výrokovú formu $V(x)$ tak, aby

a) $\{x \in M; V(x)\}$ bola prázdna množina;

b) $\{x \in M; V(x)\}$ bola celá množina M;

c) forma $V(x)$ mala zmysel a platila pre každé $x \in M$;

d) forma $V(x)$ mala zmysel pre každé $x \in M$ a neplatila pre žiadne $x \in M$;

e) forma $V(x)$ nemala zmysel pre žiadne $x \in M$.

Cvičenie 1.11. Množina M je $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Určte všetky prvky množiny M, pre ktoré má zmysel výroková forma

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2} < 8.$$

Určte obor pravdivosti tejto výrokovej formy.

Cvičenie 1.12. Zostrojte formulu zloženú z niektorých znakov $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\equiv$ a výrokových premenných A, B, $\ldots$ tak, aby nebola tautológiou.