2 Základy teórie množín

Cvičenie 2.1. Nech $A = \{a, b, \{\emptyset\}, \emptyset\}$. (a) Koľko prvkov má množina A? (b) Zistite, ktoré z nasledujúcich výrokov sú pravdivé a ktoré nie: $a \in A$, $a \subset A$, $\emptyset \in A$, $\emptyset \subset A$, $\{a, b\} \in A$, $\{a, b\} \subset A$.

Cvičenie 2.2. Nájdite množiny A, B také, že $A \subset A \cup B$, ale $A \neq A \cup B$.

Cvičenie 2.3. Ak $A \subset B$, tak pre ľubovoľnú množinu C platí
(a) $A \cup C \subseteq B \cup C$,
(b) $A \cap C \subseteq B \cap C$,
(c) $B^c \subseteq A^c$,
(d) $A \setminus C \subseteq B \setminus C$,
(e) $C \setminus B \subseteq C \setminus A$.

Cvičenie 2.4. Ak $A_1 \subset A_2$, $B_1 \subset B_2$, tak

$$A_1 \cap B_1 \subset A_2 \cap B_2 \quad \text{and} \quad A_1 \cup B_1 \subset A_2 \cup B_2.$$

Cvičenie 2.5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ práve vtedy, keď $A \subseteq C$.

Cvičenie 2.6. Rovnosť $A \cup B = A \cap C$ platí práve vtedy, keď $B \subset A \subset C$.

Cvičenie 2.7. Ak existuje taká množina X, že $A \cap X = B \cap X$ a $A \cup X = B \cup X$, tak $A = B$.

Cvičenie 2.8. Nech $A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2$. Zistite, či musí platiť $A_1 = B_1$ a $A_2 = B_2$.

Cvičenie 2.9. Dokážte ekvivalenciu nasledujúcich podmienok:
(a) $A \subset B \cap C$, $B \subset A \cap C$, $C \subset A \cap B$,
(b) $A = B = C$,
(c) $A \cup B \subset C$, $A \cup C = B$, $B \cup C \subset A$.

Cvičenie 2.10. Nech $A \subset U$, $B \subset U$. Nájdite všetky množiny $X \subset U$, pre ktoré platí
(a) $A \cup X = B$,
(b) $A \cap X = B$.

Cvičenie 2.11. Nech $A, X_1, \dots, X_n$ sú množiny. Dokážte matematickou indukciou nasledujúce pravidlá:

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap X_i) \quad \text{a} \quad A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup X_i).$$

Cvičenie 2.12. Nech X, $A_1, \dots, A_n$ sú množiny. Dokážte matematickou indukciou zobecnené de Morganove vzorce:

$$X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus A_i) \quad \text{a} \quad X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus A_i).$$

Cvičenie 2.13. Vyjadrite ostatné množinové operácie pomocou daných operácii, alebo dokážte, že sa to nedá.
(a) $\{\cup, {}^c\}$;
(b) $\{\cap, {}^c\}$;
(c) $\{\cup, \cap\}$;
(d) $\{\cup, \setminus\}$;
(e) $\{\cup, \doteq\}$;
(f) $\{\setminus, \doteq\}$;
(g) $\{\setminus, {}^c, \doteq\}$;

Cvičenie 2.14. Zostrojte potenčné množiny pre nasledujúce množiny: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{a\}$, $\{a, b, \{a\}\}$.

Cvičenie 2.15. Nech $A \subset B$. Potom $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

Cvičenie 2.16. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

Cvičenie 2.17. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$.