Cvičenie 2.1. Nech A, B, C sú množiny. Ak $C \neq \emptyset$ a $A \times C = B \times C$, potom $A = B$. Dokážte!

Cvičenie 2.2. Nech A, B, C, D sú množiny. Ak $A \times B \neq \emptyset$ a $A \times B = C \times D$, potom $A = C$, $B = D$. Dokážte!

Cvičenie 2.3. Nájdite také množiny A, B, C, aby platilo (neplatilo):
(i) $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$.
(ii) $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$.
(iii) $A \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times (A \setminus C)$.

Cvičenie 2.4. Ak A, B, C, D sú neprázdne množiny, tak

$$A \times B = C \times D \equiv A = C \wedge B = D.$$

Cvičenie 2.5. Nech A, B sú ľubovoľné množiny. Potom ak $A \subseteq B$, tak pre každú množinu C platí

$$A \times C \subseteq B \times C.$$

Cvičenie 2.6. Množiny A, B sú disjunktné práve vtedy, keď

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset.$$

Cvičenie 2.7. Vymenujte všetky relácie medzi prvkami množín $X = \{a, b, c\}$ a $Y = \{d\}$, kde a, b, c, d sú navzájom rôzne prvky.

Cvičenie 2.8. Určite počet všetkých relácií na konečnej množine, ktorá má práve n prvkov.

Cvičenie 2.9. Je skladanie relácií komutatívne? Kedy?

Cvičenie 2.10. Pre reláciu S na množine A definujeme indukciou symbol S^n: $S^1 = S$, $S^{n+1} = S \circ S^n$. Nájdite reláciu S na konečnej množine A takú, že $S^n \neq S^{n+1}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$.

Cvičenie 2.11. Nech sú R, R_1 a R_2 relácie z A do B a S, S_1 a S_2 relácie z B do C. Potom platí:
(a) $R(S_1 \cup S_2) = RS_1 \cup RS_2$,
(b) ak $S_1 \subseteq S_2$, tak $RS_1 \subseteq RS_2$,
(c) $R(S_1 \cap S_2) \subseteq RS_1 \cap RS_2$,

Cvičenie 2.12. Nech R a S sú ľubovoľné ekvivalencie na množine X. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich relácií sú nutne tiež ekvivalencie: $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, RS, R^{-1}.

Cvičenie 2.13. Koľko je všetkých relácií ekvivalencie na štvorprvkovej množine? Koľko ich je na päťprvkovej množine?

Cvičenie 2.14. Nech $A \neq \emptyset$. Je niektorá z relácií $\emptyset$, $A \times A$ relácia ekvivalencie na A.

Cvičenie 2.15. Zistite, ktoré relácie R na množine prirodzených čísel sú reflexívne, symetrické a tranzitívne:
(a) $(x, y) \in R \equiv x + y$
(a) $(x, y) \in R \equiv x + y$ je párne číslo,
(b) $(x, y) \in R \equiv x - y$ je nepárne číslo,

(c) $(x, y) \in R \equiv x + y$ je nepárne číslo,
(d) $(x, y) \in R \equiv x + y \leq 100$,
(e) $(x, y) \in R \equiv |x - y| \leq 1$,
(f) $(x, y) \in R \equiv x|y$,
(g) $(x, y) \in R \equiv (x^2 - y^2)$ je deliteľné 3.

Cvičenie 2.16. Zistite, či sú množiny $(N, \leq)$ a $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ úplne usporiadané.

Cvičenie 2.17. Nech sú R, S usporiadania na množine A. Zistite, či sú nasledujúce relácie usporiadaniami na A:
(a) $R \cup S$,
(b) $R \cap S$,
(c) RS.

Cvičenie 2.18. Uvažujme množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ usporiadanú reláciou deliteľnosti. Koľko najviac prvkov môže mať podmnožina $X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, ktorá je reláciou deliteľnosti usporiadaná lineárne.

Cvičenie 2.19. Nájdite usporiadanú množinu, ktorá bude mať n maximálnych a m maximálnych prvkov.

Cvičenie 2.20. Nájdite príklad prostej funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ktorá nie je na. Nájdite príklad funkcie na $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ktorá nie je prostá.

Cvičenie 2.21. Označme $i_X : X \to X$ funkciu, ktorá zobrazuje každý prvok množiny X na seba (identická funkcia). Nech $f : X \to Y$ je nejaká funkcia. Ukážte, že:
(a) funkcia $g : Y \to X$ taká, že $g \circ f = i_X$, existuje práve keď f je prostá,
(b) funkcia $g : Y \to X$ taká, že $f \circ g = i_Y$, existuje práve keď f je na.

Cvičenie 2.22. (a) Ak je $g \circ f$ funkcia na, musí g byť na? Musí f byť na?
(b) Ak je $g \circ f$ prostá funkcia, musí g byť prosté? Musí f byť prosté?

Cvičenie 2.23. Zostrojte množiny X, Y a zobrazenie $f : X \to Y$ tak, aby relácia f^{-1} nebola zobrazenie.

Cvičenie 2.24. Spočítajte, koľko existuje zobrazení n prvkovej množiny na m-prvkovú: (a) pre $m = 2$, (b) pre $m = 3$, (c) napíšte vzorec pre obecné m, n, (d) ukážte bez použitia výsledku (c), že počet zobrazení na m prvkovú mnžinu je deliteľný číslom $m!$.

Cvičenie 2.25. Koľkými spôsobmi je možné rozdeliť n ľudí do k skupín, t.j. koľko existuje ekvivalencií na n prvkovej množine s práve k triedami?

Cvičenie 2.26. Koľko je celkom ekvivalencií na n prvkovej množine?