Dirichletov princíp (DP)

1. Možných súčtov je 11 (od 2 po 12), preto treba hodiť aspoň 12-krát.
2. Možných súčtov je 16 (od 3 po 18), preto treba hodiť aspoň $(3.16 + 1) = 49$-krát.
3. a) Rozlíšené kocky : rôznych dvojíc je $6.6 = 36$, treba aspoň $2.36 + 1 = 73$ hodov.

   b) Nerozlíšené kocky : rôznych dvojíc je 21, treba aspoň $2.21+1 = 43$ hodov.
4. a) Sporom. Ak sú všetky menšie ako $\frac{b}{n}$, súčet je menší ako $n.\frac{b}{n} = b$. Spor.

   bcd) Až na ostré/neostré/obrátené nerovnosti to isté ako a).
5. Z Eulerovej vety $\Rightarrow$, že mnohosten má 21 hrán, teda súčet stupňov vrcholov je 42. Keďže $42 \geq 37 = 9.4 + 1$, z DP $\Rightarrow$, že z niektorého vrcholu vychádza aspoň 5 hrán, q.e.d.
6. Hrán je 11, súčet počtov hrán v stenách 22, stien 7, z DP $\Rightarrow$, že $\exists$ stena s aspoň 4 hranami, ale keďže každá stena má aspoň 3 hrany, majú steny dokopy aspoň 21 hrán, preto jediná možnosť je, že jedna stena má 4 hrany a všetky ostatné po 3 hrany.
7. Záhradu 80×90 rozdeľme na 10×18 obdĺžnikov tvaru 8×5. Máme 365 stromov v 180 obdĺžnikoch, z DP $\Rightarrow$, že v niektorom sú aspoň 3.
8. Obdĺžnik 27×36 rozdeľme na 9×18 obdĺžnikov tvaru 3×2 a každý z nich uhlopriečkou na dva trojuholníky s plochou 3. Máme 1945 bodov v $9.18.2 = 324$ trojuholníkoch, z DP $\Rightarrow$ q.e.d.
9. 13 vysielačov pokryje max. plochu $13.\pi.80^2 = 83200.\pi < 268138$ km^2.
10.
11.
12.
13. Štvorec rozrežeme na 25 štvorčekov so stranou $\frac{1}{5}$. Z DP v niektorom ležia aspoň 3 z 51 bodov. Keďže $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7}$, celý tento štvorec leží v kruhu so stredom v jeho priesečníku uhlopriečok a polomerom $\frac{1}{7}$. V tomto kruhu ležia teda aspoň 3 body, q.e.d.
14. Označme naše čísla $c_1, \ldots, c_{82}$. Ak niektoré z čísel $c_1 - c_2, c_1 - c_3, \ldots, c_1 - c_{82}$ dáva po del. 81 zvyšok 0, vyhrali sme. Ak nie, máme 81 čísel, ktoré dávajú nanajvýš 80 zvyškov, podľa DP niektoré dve dávajú rovnaký zvyšok. BUNV nech sú to $c_1 - c_i = 81a + z$, $c_1 - c_j = 81b + z$, pričom $i \neq j$ a $0 \leq z < 81$. Potom ale $c_i - c_j = (c_1 - c_j) - (c_1 - c_i) = (81b + z) - (81a + z) = 81(b - a)$.
15. Dokážeme tvrdenie, z ktorého budú vyplývať tvrdenia 16 a 17. Ku každému n nesúdeliteľnému s 10 existuje číslo tvaru $111\ldots 1$, ktoré je ním deliteľné. Dôkaz: Zoberme čísla $1, 11, \ldots, 11...1$, z ktorých posledné má $n+1$ cifier. Z DP niektoré dve dávajú rovnaký zvyšok po delení n. Preto ich rozdiel je deliteľný n. (Tým je dokázané tvrdenie 16, lebo ich rozdiel je tvaru $11\ldots 100\ldots 0$.) Pre n nesúdeliteľné s 10 z toho dostávame, že keďže n delí $11\ldots 100\ldots 0 = 11\ldots 1.10^k$, delí aj $11\ldots 1$.
16. Keďže prvočísla rôzne od 2 a 5 sú nesúdeliteľné s 10, môžme použiť predchádzajúcu vetu.

17. Označme čísla $a_1, \ldots, a_n$. Ďalej označme $b_i = a_1 + \ldots + a_i$. Ak niektoré b_i dáva zvyšok 0 po delení n, hotovo, inak máme n čísel, ktoré dávajú najvac $n-1$ zvyškov. Z DP niektoré 2 dávajú rovnaký zvyšok, preto ich rozdiel $b_j - b_i$ je deliteľný n. Ich rozdiel ale je $a_{i+1} + \ldots + a_j$.

18.

19. Vyplýva z úlohy 20.

20. Zoberme čísla $p, p^2, \ldots, p^{10^{n+1}+1}$. Niektoré dve z nich podľa DP dávajú rovnaký zvyšok po delení 10^{n+1}. Nech sú to p^k a p^l. Potom $10^{n+1} | p^l - p^k = p^k(p^{l-k} - 1)$. Keďže 10 je nesúdeliteľné s p, $\Rightarrow$ z toho, že $10^{n+1} | p^{l-k} - 1$, čiže $p^{l-k} \equiv 1 (\text{mod } 10^{n+1})$. To ale znamená, že p^{l-k} končí skupinou n núl a jednotkou.

21. Sporom. Keby boli najviac 2 ofic. jazyky, tak oficiálnymi jazykmi hovorí dokopy najviac 30 delegátov. Každým z ostatných 9 jazykov hovoria najviac 4 delegáti. To ale znamená, že delegátov je najviac 66 – spor.

22.

23.

24.

25.

26.

27.

28.

29.

30.

31.

32.

33.

34.

35.

Spočítateľné množiny

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11. Intervalu (a, b) priraďme dvojicu $a, b \in Q \times Q$. Zjavne je to injekcia, preto má množina vš. intervalov s rac. koncami mohutnosť nanajvýš rovnú mohutnosti množiny $Q \times Q$, tá je ale spočítateľná.

12. Napr. $X = Q^n$. Rac. čísla sú hustá podmnožina R, teda pre ľubovoľné $\forall\, r, \varepsilon \in R\ \exists\ q \in Q;\ |r - q| < \varepsilon$. Preto keď máme $a = (a_1, \dots, a_n)$, stačí nájsť $x_1, \dots, x_n \in Q; |a_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{n}$. Také x_i určite existujú a zároveň je potom $\sum |x_i - a_i| < n.\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$, takže $X = Q^n$ naozaj vyhovuje.

13. V každom z nich leží aspoň jedno rac. číslo. Každému intervalu priraďme niektoré rac. číslo z neho. Keďže sú disjunktné, je to injekcia, teda mohutnosť množiny intervalov je nanajvýš rovná mohutnosti Q, teda množina intervalov je spočítateľná.

14. a) Z analýzy vieme, že pre rastúcu funkciu je $\lim_{x \to a+} f(x) = sup_{x<a} f(x)$.
    b) ... nejako cez disjunktné intervaly na osi y.

15. bolo na cvikách

16. Zjavne $T_k(0) = \{(0, 0, \dots, 0, \dots)\}$, preto $|T_k(0)| = 1$.

    Keď X obsahuje aspoň 2 prvky (BUNV 1 a 2), môžme prirodzenému číslu n priradiť postupnosť n jednotiek a dvojky, preto je určite $|X| \succeq \aleph_0$. Špeciálne $|T_k(0,1)| \succeq \aleph_0$, $|T_k(N)| \succeq \aleph_0$ a $|T_k(Q)| \succeq \aleph_0$.

    Zobrazme každú postupnosť z $T_k(X)$ na konečnú postupnosť, ktorú z nej dostaneme, keď z konca vynecháme všetky rovnaké členy okrem jedného. (T.j. napr. postupnosť $3, 1, 4, 1, 5, 2, 2, \dots, 2, \dots$ na $3, 1, 4, 1, 5, 2$.) Toto je zjavne injekcia, preto mohutnosť $T_k(X)$ je nanajvýš rovná mohutnosti množiny všetkých konečných postupností prvkov X.

    Množina všetkých konečných postupností 0 a 1 má mohutnosť $\aleph_0$, lebo každá z nich zodpovedá nejakému konečnému desatinnému rozvoju reálneho (a teda zároveň racionálneho) čísla. (Teda napr. postupnosti 0,1,0,1,1,1 priradíme číslo $0,010111\mathbf{1}$ – tú jednotku na konci musíme ku každému pridať kvôli postupnostiam, ktoré končia 0.) Množinu kon. postupností prir. čísel zobrazíme do množiny kon. postupností 0 a 1 tak, že číslo n zakódujeme postupnosťou n núl a jednotkou. Množinu kon. postupností rac. čísel zobrazíme do postupnosti prir. čísel tak, že číslu $\frac{p}{q}; p \in Z, q \in N, (p, q) = 1$ priradíme $1, p, q$ ak $p \geq 0$ a $2, -p, q$ ak $p < 0$. Preto aj množina všetkých kon. postupostí prirodzených, resp. racionálnych čísel má mohutnosť $\aleph_0$.

    Teda je $|T_k(0,1)| \preceq \aleph_0$, $|T_k(N)| \preceq \aleph_0$, $|T_k(Q)| \preceq \aleph_0$, a teda podľa C-B vety $|T_k(0,1)| = |T_k(N)| = |T_k(Q)| = \aleph_0$.

    Zjavne každému reálnemu číslu môžme priradiť nekonečnú postupnosť zloženú zo samých takých čísel, preto $|T_k(R)| \succeq c$. Keby sme dokázali, že mohutnosť množiny všetkých konečných postupností reálnych čísel je c, boli by sme hotoví. Keďže sa mi to už nechce rozpisovať, využijem bez dôkazu, že $|R^n| = |R| = |\,(0,1)\,|$. Každej konečnej postupnosti $a_1, \dots, a_n$ reálnych čísel viem podľa práve uvedenej vety priradiť číslo $x \in (0,1)$. Keď jej priradím číslo $n + x$, dostanem takto injekciu z množiny všetkých kon. postupností reálnych čísel do R, takže naozaj $|T_k(R)| = c$.

17. Keďže P je spoč. množina, môžme jej prvky označiť $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$. Keď bude druhý hráč ťahať tak, že v n-tom ťahu dá číslicu, ktorú p_n nemá na $2n$-tom mieste, výsledná postupnosť nemôže patriť do P. (Dôkaz ako pri Cantorovej diagonálnej metóde - keď tam patrí, nech je to p_k, ale od p_k sa výsledná postupnosť líši na $2k$-tom mieste.)

18. Pre $P = 0, 1^N$ nech druhý hráč ťahá ako chce, výsledok bude patriť do P. Preto druhý hráč nemá vyhrávajúcu stratégiu, čiže P nie je spočítateľná.

19. Čo je podgrupa ?

Príklady rôznych typov

1.

2.

3. Určite vieme vybrať $k + 1$ čísel – napr. všetky nepárne. Stačí dokázať, že nevieme viac. Indukciou.

   1° Z 1 čísla vieme vybrať najviac 1.

   2° Majme $2k + 1$ čísel. Ak vyberieme číslo $2k + 1$, zo zvyšných žiadna dvojica nesmie mať súčet $2k + 1$, preto z každej z dvojíc $[1, 2k], [2, 2k - 1], \ldots, [k, k + 1]$ môžme vybrať najviac jedno číslo, dokopy najviac $k + 1$ čísel.

   Ak číslo $2k + 1$ nevyberieme: Ak vyberieme $2k$, tak už z každej z dvojíc $[1, 2k - 1], \ldots, [k - 1, k + 1]$ môžme vybrať najviac jedno a navyše môžme ešte vybrať k. Takže vyberieme najviac $1 + (k - 1) + 1 = k + 1$ čísel. Ak nevyberieme ani $2k$, vyberáme vlastne už len z $2k - 1$ čísel, z nich podľa ind. predp. vieme vybrať najviac k čísel.

   Preto môžme vybrať najviac $k + 1$ čísel.

4. Každý súčet je z množiny $\{-n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n\}$. Tá má $2n + 1$ prvkov, riadkov, stĺpcov a diagonál je však dokopy $2n+2$, preto taká matica neexistuje.

5. Každý má medzi 0 a $n-1$ známymi. Ak žiadni dvaja nemajú rovnako, znamená to, že jeden má 0 známych, atď., až jeden má $n - 1$ známych. Potom ale ten, čo pozná všetkých, sa pozná aj s tým, ktorý nepozná nikoho, spor.

6.

7.

8.

9.

10. Možné výsledky sú (v tvare [jednotky, dvojky, trojky]) : $[3, 0, 0]$, $[0, 3, 0]$, $[0, 0, 3]$, $[2, 1, 0]$, $[2, 0, 1]$, $[1, 2, 0]$, $[1, 0, 2]$, $[0, 2, 1]$, $[0, 1, 2]$, $[1, 1, 1]$. Možných výsledkov je teda 10, študentov 41 a z DP $\Rightarrow$ dok. tvrdenie.

11. Predstavme si kompletný graf, ktorého vrcholy sú členovia komisie. Ofarbime hranu medzi A a B, keď sú spolu na zasadnutí. Zo zadania vieme, že každú hranu ofarbíme najviac raz. Pri jednom zasadaní však ofarbíme $\binom{10}{2} = 45$

hrán, zasadaní bolo 40, teda tento graf musí mať aspoň 1800 hrán. K_n má $\binom{n}{2}$ hrán. Je teda

$$\begin{aligned} 1800 &\leq \binom{n}{2} = \frac{n.(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \\ n^2 - n - 3600 &\geq 0 \end{aligned}$$

Zjavne pre $n \leq 60$ je $n^2 - n - 3600 < n^2 - 3600 \leq 60^2 - 3600 = 0$, preto $n > 60$.

12. Podobne. Vrcholy sú ľudia, keď vytvoríme komisiu, všetkých členov pospájame hranami. Zo zadania $\Rightarrow$, že žiadni dvaja ľudia nie sú spolu vo viac ako 1 komisii, preto každú hranu ofarbíme max. raz. Hrán je $\binom{25}{2} = 300$, 1 komisia ofarbí 10 hrán, preto je komisii najviac 30.

13. To isté ako úloha 7, len v svetlomodrej.

14.

15.

16.

17. Teda toto bol buď blbý vtip, alebo som to zle pochopil.

18.