Domáca úloha číslo 1

Podpísané riešenia odovzdať na prednáške alebo cvičeniach 5-6.3.2001.

Príklad 1.1. Koľko slov dĺžky n zložených z troch písmen a, b, c neobsahuje dvojicu bezprostredne za sebou nasledujúcich a ($n \geq 1$)?

Príklad 1.2. Na aký najväčší počet oblastí môžme rozdeliť rovinu n (ostrouhlými) výsekmi ($n \geq 1$).

Príklad 1.3. Nájdite uzavretú formulu pre nasledujúcu rekurentnú rovnicu: $u_n + 2u_{n-1} - 11u_{n-2} - 12u_{n-3} + 36u_{n-4} = 0$ pre $n \geq 4$ s inicializačnými podmienkami $u_0 = 2$, $u_1 = -9$, $u_2 = 41$, $u_3 = -205$.

Príklad 1.4. Nech $a_1, \ldots, a_n$ sú nezáporné reálne čísla, pre ktoré platí $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$. Dokážte, že potom pre každé reálne číslo x platí:

$$x^2 + x \left(\sum_{1 \leq i \leq n} a_i \right)^2 + n^3 \sum_{1 \leq i \leq n} a_i^4 > 0.$$

Príklad 1.5. Nájdite uzavretú formulu pre nasledujúcu rekurentnú rovnicu: $f_1 = 2$, $f_{2n} = 2f_n + 2$, $f_{2n+1} = 2f_n + 2$ pre $n > 1$.