Domáca úloha číslo 3

Podpísané riešenia odovzdať na prednáške alebo cvičeniach 23.-24.4.2001 (uzávierka 24.4.2001 o 14.00).

Príklad 3.1. Pre ktoré n existuje graf na n vrcholoch, ktorého skóre sú až na dve navzájom rôzne čísla. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Príklad 3.2. Nech G je graf s n vrcholmi, ktorého každý vrchol má stupeň väčší než $n/2$.

(a) Dokážte, že G obsahuje aspoň jeden trojuholník (cyklus dĺžky 3).

(b) Dokážte, že existuje hrana $\{x, y\}$ obsiahnutá aspoň v $n/6$ trojuholníkoch (t.j. existuje aspoň $n/6$ vrcholov spojených ako s x tak s y). (Skúste použiť princíp inklúzie a exklúzie.)

Príklad 3.3. Dokážte, že graf je bipartitný práve vtedy, keď neobsahuje žiadnu kružnicu nepárnej dĺžky.

Príklad 3.4. Koľko čísel s n ciframi 4, 5, 6, 7, 8 a 9 má párny počet cifier 4 aj 6, pričom 5 a 7 sa v nich vyskytuje aspoň raz.

Príklad 3.5. Uvažujme súčin 4 čísiel, $abcd$. Ten môže byť uzátvorkovaný 5 spôsobmi $((ab)c)d$, $(a(bc))d$, $(ab)(cd)$, $a((bc)d)$ a $a(b(cd))$. Dokážte, že súčin $n+1$ čísiel môžeme takýmto spôsobom uzátvorkovať $\frac{1}{(n+1)}\binom{2n}{n}$ spôsobmi.

Príklad 3.6. Vo fronte na lístky stojí $2n$ ľudí, každý chce kúpiť práve jeden lístok ktorý stojí 50 Sk. Pritom n ľudí má práve 50 Sk a n ľudí 100 Sk v peňaženke. Na začiatku v pokladni nie sú žiadne peniaze. Koľkými spôsobmi môžu byť ľudia vo fronte usporiadaní, aby neboli problémy pri vydávaní korún?