Domáca úloha číslo 4

Podpísané riešenia odovzdať do 11.5.2001 (uzávierka 11.5.2001 o 12.00).

Príklad 4.1. Dokážte: ak graf s n vrcholmi neobsahuje kružnice nepárnej dĺžky a má viac ako $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ hrán, tak je súvislý.

Príklad 4.2. Excentricitou vrcholu v v grafe $G = (V, E)$ nazývame číslo:

$$e(v) = \max_{u \in V} d(v, u).$$

Najväčšiu z excentricít vrcholov nazývame priemer grafu (a označujeme $D(G)$), najmenšiu polomerom (označujeme $r(G)$).

a) Dokážte, že pre každý graf platí nerovnosť:

$$r(G) \leq D(G) \leq 2r(G).$$

b) Skonštruujte (netriviálny) graf, v ktorom platí

$$r(G) = D(G) < \infty.$$

c) Skonštruujte (netriviálny) graf, v ktorom platí

$$r(G) = 2D(G) < \infty.$$

Príklad 4.3. Nech G je graf s maximálnym stupňom 3. Dokážte, že jeho vrcholy je možné ofarbiť dvoma farbami tak, aby nevznikla jednofarebná cesta s 3 vrcholmi.

Príklad 4.4. Nech T je strom s n vrcholmi, $n \geq 2$. Pre kladné celé číslo i označme p_i počet vrcholov stromu T, ktoré majú stupeň i. Dokážte, že

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - \cdots - (n-3)p_{n-1} = 2.$$

Príklad 4.5. (nepovinný) Nech V je množina n bodov vo štvorci o strane 1. Dokážte, že existuje kostra na V s celkovou dĺžkou nanajvýš $10\sqrt{n}$ (uvažujme všetky kostry úplneho grafu V, váha hrany $\{x, y\}$ je euklidovská vzdialenosť bodov x a y.) Konštantu 10 je možné podstatne zlepšiť, ale najlepšia možná hodnota nie je známa (aký najlepší odhad sa podarí nájsť vám)?