8 Kostra grafu

Jedným zo základných grafových pojmov je pojem kostry grafu:

Definition 8.1 *Nech $G = (V, E)$ je graf. Ľubovoľný strom tvaru (V, E'), kde $E' \subseteq E$, nazveme kostra grafu G. Teda kostra grafu G je strom, ktorý obsahuje všetky vrcholy grafu G.*

Je zrejmé, že kostra môže existovať len vtedy, ak je graf súvislý. Je ľahké ukázať, že každý súvislý graf má kostru. Uvedieme si dva algoritmy na hľadanie kostry:

Kostra grafu. Nech $G = (V, E)$ je graf s n vrcholmi a m hranami. Zoraďme hrany grafu G ľubovoľne do postupnosti $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$. Algoritmom budeme postupne konštruovať množiny hrán $E_0, E_1, \ldots \subseteq E$.

Položme $E_0 = \emptyset$ a ak už bola nájdená množina E_{i-1}, určíme množinu E_i nasledujúco:

$$E_i = \begin{cases} E_{i-1} \cup \{e_i\}, & \text{ak neobsahuje graf } (V, E_{i-1} \cup \{e_i\}) \text{ kružnicu} \\ E_{i-1} & \text{ináč.} \end{cases}$$

Algoritmus sa zastaví, ak buď E_i má už $n - 1$ hrán, alebo $i = m$. Označme E_t množinu, pre ktorú sa algoritmus zastavil a nech T označuje graf (V, E_t).

Veta 8.1 *(správnosť predchádzajúceho algoritmu) Ak algoritmus skončí s grafom T s $n - 1$ hranami, potom T je kostra n-vrcholového grafu G. Ak T má $k < n - 1$ hrán, potom G je nesúvislý graf s $n - k$ komponentami súvislosti.*

Dôkaz. Podľa pravidla vytvárania množín E_i, graf T je maximálny les vzhľadom na reláciu byť podgrafom (t.j. pridaním ľubovoľnej hrany k T už vznikne kružnica).

Predpokladajme, že graf G obsahoval l komponent súvislosti.

Ak si vezmeme G_j ľubovoľnú komponentu súvislosti grafu G, podľa predpokladov T je maximálny podles v G_j. Je teda nutne súvislý a obsahujúci všetky vrcholy G_j – v každom G_j teda T vytvára kostru komponenty G_j. Počet hrán je teda $|V(G_j) - 1|$.

Spolu pre l komponent súvislosti dostávame, že algoritmus vyberie $n - l$ hrán.

Ak $l = 1$, potom G je súvislý, algoritmus skončí výberom $n - 1$ hrán a T je nutne jeho kostra. Ak $l > 1$, potom pre $k = n - l$ hrán dostávame nutne $l = n - k$ komponent súvislosti. □

Kostra grafu – rozširujúca sa: Nech $G = (V, E)$ je graf s n vrcholmi a m hranami. Budeme postupne vytvárať množiny vrcholov $V_0, V_1, \ldots \subseteq V$ a $E_0, E_1, \cdots \subseteq E$ hrán, pričom $E_0 = \emptyset$ a $V_0 = \{v\}$, kde v je ľubovoľný zvolený vrchol z grafu G.

Ak sú už V_{i-1} a E_{i-1} vytvorené, nájdeme nejakú hranu $e_i = \{x_i, y_i\} \in E(G)$ takú, že $x_i \in V_{i-1}$, $y_i \in V \setminus V_{i-1}$ a položíme $V_i = V_{i-1} \cup \{y_i\}$, $E_i = E_{i-1} \cup \{e_i\}$. Ak žiadna taká hrana neexistuje, algoritmus končí.

Lemma 8.1 *Ak predchádzajúci algoritmus skončí s grafom T s n vrcholmi, potom je to kostra. V opačnom prípade je G nesúvislý graf a vrcholy T tvoria kostru v komponente grafu G obsahujúcej vrchol v.*

Dôkaz. Graf T je strom (pretože je súvislý a má správny počet vrcholov a hrán). Ak má T n vrcholov, potom je to kostra.

Ak má $m < n$ vrcholov, potom $V(T)$ tvoria komponentu grafu G. Ak by totiž existovalo nejaké $x \in V(T)$ a $y \notin V(T)$ pre ktoré je v grafe G cesta, potom na tejto ceste nájdeme hranu $e = \{x_j, y_j\} \in E(G)$, pre ktorú $x_j \in V(T)$, $y_j \in V \setminus V(T)$. Algoritmus mohol teda ešte pridať hranu e a vrchol y_j, čo je spor. □

8.1 Problém minimálnej kostry

Pre súvislý graf $G = (V, E)$ s nezáporným ohodnotením hrán w nájsť súvislý podgraf (V, E') taký, že výraz

$$w(E') = \sum_{e \in E'} w(e)$$

nadobúdal minimálnu hodnotu.

Je ľahké vidieť, že riešením tejto úlohy je vždy nejaká kostra grafu G (ak je ohodnotenie všetkých hrán kladné, môže byť dokonca riešením len kostra).

Kruskalov alebo hladový algoritmus. Je daný súvislý graf $G = (V, E)$ s nezáporným ohodnotením w. Predpokladajme, že hrany sú usporiadané tak, že platí: $0 \le w(e_1) \le w(e_2) \le \cdots \le w(e_m)$. Pre toto usporiadanie preveďme základný algoritmus hľadania kostry grafu a výsledkom bude minimálna kostra grafu.

Veta 8.2 *Kruskalov algoritmus rieši problém minimálnej kostry.*

Dôkaz. Označme T výslednú kostru, ktorú vráti Kruskalov algoritmus. Nech $\tilde{T}$ je ľubovoľná iná kostra. Potrebujeme dokázať, že $w(E(T)) \le w(E(\tilde{T}))$. Preznačme hrany kostry T ako $e'_1, e'_2, \ldots$ tak, aby platilo

$$w(e'_1) \le w(e'_2) \le \cdots \le w(e'_{n-1}).$$

Podobne nech $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_{n-1}$ sú hrany kostry $\tilde{T}$ usporiadané vzostupne podľa cien.

Dokážeme, že pre $i = 1, \ldots, n - 1$ platí dokonca

$$w(e'_i) \le w(\tilde{e}_i), \tag{8.1}$$

odkiaľ samozrejme triviálne vyplýva, že T je minimálna kostra. Predpokladajme teda, že (7.1) neplatí a zvoľme najmenšie i také, že $w(e'_i) > w(\tilde{e}_i)$. Zrejme $i > 1$ (začíname výberom najlacnejšej hrany). Uvažujme množiny

$$F' = \{e'_1, \ldots, e'_{i-1}\},$$
$$\tilde{F} = \{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_i\}.$$

Grafy (V, F') a $(V, \tilde{F})$ neobsahujú kružnicu a naviac $|F'| = i - 1$, $|\tilde{F}| = i$.

K hľadanému sporu stačí ukázať, že existuje hrana $e \in \tilde{F}$, pre ktorú graf $(V, F' \cup \{e\})$ neobsahuje kružnicu. Potom totiž

$$w(e) \le w(\tilde{e}_i) < w(e'_i)$$

a v okamihu, keď sa v algoritme rozhodovalo o hrane e sme urobili chybu, pretože nebol dôvod ju zamietnuť a mali sme ju vybrať namiesto hrany e'_i.

Stačí teda ukázať nasledujúce tvrdenie: *ak F', $\tilde{F} \subseteq \binom{V}{2}$ sú dve množiny hrán, pričom $(V, \tilde{F})$ neobsahuje kružnicu a $|F'| < |\tilde{F}|$, potom nejaká hrana $e \in \tilde{F}$ spája vrcholy dvoch rôznych komponent grafu (V, F').*

Nech $V_1, V_2, \ldots, V_s$ je rozklad množiny V na komponenty grafu (V, F'). Platí

$$\left| F' \cap \binom{V_j}{2} \right| \ge |V_j| - 1$$

a preto $|F'| \ge n - s$. Na druhej strane pretože $\tilde{F}$ neobsahuje kružnice, máme

$$\left| \tilde{F} \cap \binom{V_j}{2} \right| \le |V_j| - 1$$

a teda najviac $n - s$ hrán z $\tilde{F}$ je obsiahnutých v komponentách V_j. Pretože ale $|\tilde{F}| > |F'|$, nejaká hrana $e \in \tilde{F}$ je medzi dvoma rôznymi komponentami. □