# 10 Ramseyho čísla

**Definition 10.1** *Nech $G = (V, E)$ je obyčajný graf. Množina $M \subseteq V$ sa nazýva nezávislá, ak pre žiadnu dvojicu vrcholov z množiny $M$ neexistuje v grafe $G$ hrana, t.j. $\binom{M}{2} \cap E = \emptyset$. Nezávislosť grafu je veľkosť najväčšej nezávislej množiny, označujeme $\alpha(G)$, t.j.*

$$\alpha(G) = \max\{|M| : M \subseteq V, M \text{ nezávislá množina}\}.$$

Vyjdime z hlavolamu: je pravda, že v spoločnosti, kde je aspoň 6 ľudí, existuje buď trojica ľudí, ktorí sa navzájom poznajú alebo trojica ľudí, ktorí sa navzájom nepoznajú?

Vytvorme si graf takto: vrcholmi budú osoby, ktoré spojíme hranou ak sa navzájom poznajú. Potom hlavolam možno sformulovať nasledovne: platí pre každý obyčajný graf s počtom vrcholov aspoň 6, že buď graf $G$ obsahuje $K_3$ alebo $\alpha(G) \geq 3$?

Iná formulácia hlavolamu: ak ofarbíme všetky hrany $K_6$ dvoma farbami Č a M je potom pravda, že tam bude existovať jednofarebný trojuholník? Ak $v \in K_6$ ľubovoľný, potom z neho vychádzajú buď aspoň 3 červené hrany, alebo aspoň 3 modré hrany s koncovými vrcholmi $u_1, u_2, u_3$. Ak sú hrany medzi týmito vrcholmi rovnakej farby, máme hľadaný trojuholník. Ak nie, potom vždy existuje medzi nimi hrana $\{u_x, u_y\}$, $(x, y \in \{1, 2, 3\})$ ktorá spolu s hranami $\{v, u_x\}$ a $\{v, u_y\}$ tvorí jednofarebný trojuholník. (Nakresliť!)

Zobecnime si (ako obvykle) predchádzajúci hlavolam:

Existuje vôbec a keď áno tak aké je najmenšie prirodzené číslo $k$ také, že každý obyčajný graf $G$ na $k$ vrcholoch buď obsahuje $K_m$ alebo $\alpha(G) \geq n$? Čísla s takouto vlastnosťou sa volajú Ramseyho čísla a označujú sa $r(m, n)$.

Rekurentný vzťah medzi Ramseyho číslami našli Erdös a Szekeres.

**Veta 10.1** *Pre $m, n \geq 2$ platí*

$$r(m, n) \leq r(m, n-1) + r(m-1, n). \tag{10.1}$$

**Dôkaz.** Nech $G = (V, E)$ má $r(m, n-1) + r(m-1, n)$ vrcholov a zvoľme $v \in V$ ľubovoľný. Budeme rozlišovať 2 prípady:

a) $d_G(v) \geq r(m-1, n)$,

b) $d_G(v) < r(m-1, n)$.

V prípade a) označme $v_1, \ldots, v_k$ vrcholy patriace do okolia $v$ a nech $G_1$ je podgraf indukovaný vrcholmi $v_1, \ldots, v_k$. Pretože $k \geq r(m-1, n)$ buď $G_1$ obsahuje $K_{m-1}$ alebo $\alpha(G_1) \geq n$ (vyplýva priamo z definície Ramseyových čísel). Ak $G_1$ obsahuje $K_{m-1}$, tak pridaním vrcholu $v$ (ktorý susedí so všetkými vrcholmi v $G_1$) dostaneme $K_m$; ak $\alpha(G_1) \geq n$, potom zrejme aj $\alpha(G) \geq n$. Teda tvrdenie vety platí.

V prípade b) v doplnku $\overline{G}$ grafu $\overline{G} = (V, K_{|V|} \setminus E)$ platí $d_{\overline{G}}(v) \geq r(m-1, n)$. Dôkaz beží analogicky ako v časti a) a využitím faktu $r(m, n) = r(n, m)$. □

Ľahko sa dá tiež ukázať, že pre ľubovoľné prirodzené $m, n \geq 2$ platí $r(m, 2) = m$, $r(2, n) = n$. Z predchádzajúcej vety dostaneme

$$r(3, 3) \leq r(3, 2) + r(2, 3) = 3 + 3 = 6.$$

To znamená, že pre 6-vrcholové grafy už platí, že obsahujú $K_3$ alebo nezávislú množinu veľkosti 3, čo je odpoveďou na našu hádanku. Ľahko sa nájde príklad päťvrcholového grafu, ktorý neobsahuje ani $K_3$, ani nezávislú množinu veľkosti 3, t.j. $r(3, 3) = 6$.

**Veta 10.2** *Pre $m, n \geq 2$ platí*

$$r(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}. \tag{10.2}$$

**Dôkaz.** Dokazovaný vzťah platí akonáhle aspoň jedno z čísel $m$ a $n$ sa rovná dvom. Potom: $r(m, 2) = m \leq \binom{m}{m-1}$, $r(2, n) = n \leq \binom{n}{1}$. Predpokladajme, že (10.2) platí pre všetky čísla $m_1$ a $n_1$, ktorých súčet je menší ako $m + n$ a dokážeme, že potom platí aj pre $m$ a $n$.



Podľa IP platí

$$r(m, n-1) \leq \binom{m+n-3}{m-1}, \quad r(m-1, n) \leq \binom{m+n-3}{m-2}.$$

Z toho na základe (10.1) dostávame:

$$r(m, n) \leq r(m-1, n) + r(m, n-1) \leq \binom{m+n-3}{m-2} + \binom{m+n-3}{m-1} = \binom{m+n-2}{m-1}.$$

□

Uvedený odhad je veľmi nepresný, ale má dôležitý teoretický význam: vieme, že $r(m, n)$ je vždy konečné číslo. Nájsť presné hodnoty Ramseyho čísel je veľmi ťažká úloha a poznáme doteraz len niekoľko málo hodnôt, najväčšie $r(4, 4) = 18$, $r(3, 7) = 23$. Na určenie ďalších hodnôt dnes ešte nestačia počítače. Jeden z najvýznamnejších matematikov 20.storočia vysvetľoval náročnosť presného výpočtu Ramseyho čísel nasledujúcim spôsobom. Predstavme si, že na Zem zaútočia mimozemšťania a povedia, že nás nezničia, keď vypočítame presne hodnotu $r(5, 5)$. Ak zhromaždíme všetkých žijúcich vynikajúcich matematikov a zapojíme do výpočtu všetky výkonné počítače, tak by sa nám mohlo podariť určiť presnú hodnotu $r(5, 5)$. Ak nám však mimozemšťania dajú za úlohu určiť presnú hodnotu $r(6, 6)$, je lepšie vrhnúť sa do vývoja zbraní …

# 11 Systémy rozličných reprezentantov

Na zoznamovacom večierku sa stretlo niekoľko „vyberavých“ dievčat a chlapcov. Pokiaľ by sme nekládli žiadne obmedzujúce podmienky, tak všetky dievčatá si môžu vybrať chlapca, ak chlapcov je aspoň toľko ako dievčat. Avšak dievčatá sú „vyberavé“ a každej z dievčat sa páčia len niektorí chlapci, t.j. každá z nich má svoj zoznam chlapcov, ktorí pripadajú do úvahy. Za akých podmienok si môžu všetky dievčatá vybrať chlapcov podľa svojich zoznamov (každému dievčaťu bude prislúchať jeden chlapec zo zoznamu a samozrejme rôznym dievčatám rôzni chlapci)? Odpoveď na túto otázku dáva Hallova veta (P. Hall, 1935).

**Definition 11.1** *Nech $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ je systém podmnožín množiny $X$. Potom systém rozličných reprezentantov (transverzála) je množina $n$ prvkov $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ s nasledujúcou vlastnosťou: $x_i \in A_i$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$ a $x_i \neq x_j$ pre $1 \le i < j \le n$.*

V motivačnom príklade množine $X$ odpovedá množina chlapcov, $A_i$ je zoznam chlapcov, ktorí sa páčia $i$-temu dievčaťu a systém rozličných reprezentantov (ak existuje) odpovedá možnému vytvoreniu párov, pričom každé dievča dostane chlapca práve zo svojho zoznamu.

**Veta 11.1 (Hallova).** *Systém $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ podmnožín množiny $X$ má transverzálu práve vtedy, keď pre každé $k = 1, 2, \ldots, n$ a pre každý výber $i_1$, $i_2$, …, $i_k$ taký, že $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ platí*

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| \ge k. \tag{11.1}$$

**Dôkaz.** $\Rightarrow$ Ak má systém $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ transverzálu $x_1$, $x_2$, …, $x_n$, tak je podmienka istotne splnená, keďže pre ľubovoľné $k$, $1 \le k \le n$ platí

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| \ge |\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}| = k.$$

$\Leftarrow$ Implikáciu dokážeme matematickou indukciu podľa $n$, t.j. že keď systém $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ spĺňa podmienku Hallovej vety, tak má transverzálu.

i) Ak $n = 1$, tak $|A_1| \ge 1$, lebo systém spĺňa podmienku vety. Zrejme teda existuje prvok $x_1 \in A_1$, ktorý je transverzálou jednomnožinového systému $A_1$.

ii) Predpokladajme $n > 1$ a uvažujme systém $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ podmnožín množiny $X$, ktorý spĺňa podmienku Hallovej vety. IP: nech má transverzálu každý systém, ktorý má menej ako $n$ množín a spĺňa podmienku Hallovej vety. Rozlíšime dva prípady:

1. Pre každé $k = 1, 2, \ldots, n-1$ a pre každý výber $i_1$, $i_2$, …, $i_k$ taký, že $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ platí
$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| \ge k + 1.$$
Inými slovami, podmienka je splnená pre každý výber s rezervou. Keďže systém spĺňa podmienky Hallovej vety, nutne $|A_n| \ge 1$. Vyberme ľubovoľný $x_n \in A_n$ a uvažujme systém $A_1 \setminus \{x_n\}$, $A_2 \setminus \{x_n\}$, …, $A_{n-1} \setminus \{x_n\}$. Dokážeme, že tento systém spĺňa podmienku Hallovej vety. Nech $1 \le k \le n-1$ a nech pre $i_1, i_2, \ldots, i_k$ platí $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n-1$. Potom
$$\begin{aligned}|(A_{i_1} \setminus x_n\}) \cup (A_{i_2} \setminus x_n\}) \cup \cdots \cup (A_{i_k} \setminus x_n\})| &= \\ &= |(A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}) \setminus \{x_n\}| \ge \\ &\ge |A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| - 1 \ge (k+1) - 1 = k.\end{aligned}$$
Teda systém $A_1 \setminus \{x_n\}$, $A_2 \setminus \{x_n\}$, …, $A_{n-1} \setminus \{x_n\}$ spĺňa podmienku Halovej vety a podľa IP má transverzálu $x_1$, …, $x_{n-1}$, ktorú môžme doplniť prvkom $x_n$ na transverzálu systému $A_1$, $A_2$, …, $A_{n-1}$, $A_n$.
2. Pre nejaké $p$ také, že $1 \le p \le n-1$ a pre nejaký výber $i_1, i_2, \ldots, i_p$ taký, že $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n$ platí $|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_p}| = p$. Zrejme BUNO môžme predpokladať, že $A_j = A_{i_j}$ pre $j = 1, \ldots, p$.
To znamená, že pre tento výber je podmienka Hallovej vety splnená tesne. Systém $A_1$, $A_2$, …, $A_p$ je podsystémom systému $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ a preto $A_1$, $A_2$, …, $A_p$ spĺňa podmienku Hallovej vety. Keďže $p \le n-1$, tak podľa IP má $A_1$, $A_2$, …, $A_p$ transverzálu $x_1$, $x_2$, …, $x_p$. Pretože predpokladáme $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p| = p$, zrejme $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$. Označme $Y = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ a uvažujme systém $n-p$ podmnožín $A_{p+1} \setminus Y$, $A_{p+2} \setminus Y$, …, $A_n \setminus Y$. Nech $1 \le k \le n-p$ a nech pre $j_1$, $j_2$, …, $j_k$ platí $p+1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$. Potom
$$\begin{aligned}|(A_{j_1} \setminus Y) \cup (A_{j_2} \setminus Y) \cup \cdots \cup (A_{j_k} \setminus Y)| &= |(A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \cdots \cup A_{j_k}) \setminus Y)| = \\ &= |(Y \cup A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \cdots \cup A_{j_k}) \setminus Y)| = |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p \cup A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \cdots \cup A_{j_k}) \setminus Y)| = \\ &= |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p \cup A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \cdots \cup A_{j_k})| - |Y| \ge (p+k) - p = k.\end{aligned}$$
Teda systém $A_{p+1} \setminus Y$, $A_{p+2} \setminus Y$, …, $A_n \setminus Y$ spĺňa podmienku Hallovej vety. Keďže $p \ge 1$, tak $n-p \le n-1$ a podľa IP má systém $A_{p+1} \setminus Y$, $A_{p+2} \setminus Y$, …, $A_n \setminus Y$ transverzálu $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$. Túto transverzálu možno doplniť transverzálou $x_1, x_2, \ldots, x_p$ systému $A_1$, $A_2$, …, $A_p$ na transverzálu $x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ systému $A_1$, $A_2$, …, $A_n$.



□

**Príklad.** Majme päť dievčat a päť chlapcov. Chlapci sú označení číslami 1, 2, …, 5. Prvému dievčaťu sa páčia chlapci s číslami 1, 4, t.j. $A_1 = \{1, 4\}$, ďalej $A_2 = \{1, 3\}$, $A_3 = \{1, 2, 4, 5\}$, $A_4 = \{1, 3, 4\}$ a $A_5 = \{3, 4\}$. Možno vytvoriť dvojice tak, aby každé dievča bolo v páre s chlapcom, ktorý sa jej páči?

*Riešenie.* Keďže $|A_1 \cup A_2 \cup A_4 \cup A_5| = |\{1, 3, 4\}| = 3$, tak podľa Hallove vety systém $A_1$, $A_2$, …, $A_5$ nemá transverzálu a teda nemožno požadované dvojice vytvoriť pre všetky dievčatá.

**Aplikácia.** Rozširovanie latinských obdĺžnikov na latinské štvorce.

**Definition 11.2** *Latinský obdĺžnik typu $r \times n$ je obdĺžniková tabuľka a $r$ riadkami a $n$ stĺpcami, v ktorej je v každom poli zapísaný prvok zmnožiny $\{1, \ldots, n\}$, pričom v každom riadku a v každom stĺpci sa každý prvok z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ vyskytuje nanajvýš raz. Latinský obdĺžnik $n \times n$ nazývame latinský štvorec.*

**Veta 11.2** *Každý latinský obdĺžnik možno doplniť na latinský štvorec.*

**Dôkaz.** Majme latinský obdĺžnik $L$ typu $r \times n$, kde $r < n$. Dokážeme, že $L$ možno rozšíriť pridaním nového riadku na latinský obdĺžnik typu $(r+1) \times n$. Pre každé $i$ od 1 do $n$ označme $A_i$ tie prvky z $\{1, 2, \ldots, n\}$, ktoré sa nevyskytujú v $i$-tom stĺpci $L$. Ak dokážeme, že systém $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ spĺňa podmienku Hallovej vety, potom tento systém má transverzálu, dopísaním ktorej môžme latinský obdĺžnik $L$ rozšíriť o jeden riadok.

Nech $1 \le k \le n$ a nech pre $i_1$, $i_2$, …, $i_k$ platí $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$. Potom

$$|A_{i_1}| + |A_{i_2}| + \cdots + |A_{i_k}| = k(n-r).$$

Keďže všetky prvky v riadku $L$ sú rôzne, tak každý prvok z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ sa vyskytuje v $L$ práve $r$-krát. To znamená, že každý takýto prvok chýba v $r$-množinách systému $A_1, \ldots, A_n$ a teda sa vyskytuje v $n-r$ množinách tohoto systému. Teda každý prvok z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ sa vyskytuje v množinách $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ nanajvýš $n-r$-krát. Preto

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| \ge \frac{k(n-r)}{n-r} = k,$$

čiže systém $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ spĺňa podmienku Hallovej vety. □

## 11.1 Zovšeobecnenie Hallovej vety

**Veta 11.3** *Nech je $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ systém podmnožín množiny $X$ a nech $r$ spĺňa $1 \le r \le n$. V systéme $A_1, A_2, \ldots, A_n$ existuje $r$-množinový podsystém s transverzálou práve vtedy, keď pre každé $k = 1, 2, \ldots, n$ a pre každý výber $i_1$, $i_2$, …, $i_k$ taký, že $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ platí*

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| \ge k - (n-r).$$

**Dôkaz.** Nech $Y$ je množina $n - r$ prvkov taká, že $X \cap Y = \emptyset$. Potom zrejme $A_i \cap Y = \emptyset$ pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$, keďže $A_i \subseteq X$. Uvažujme systém $A_1 \cup Y$, $A_2 \cup Y$, …, $A_n \cup Y$ podmnožín množiny $X \cup Y$.

Ukážeme, že $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ má $r$-množinový podsystém s transverzálou práve vtedy, keď má systém $A_1 \cup Y$, $A_2 \cup Y$, …, $A_n \cup Y$ transverzálu.

$\Rightarrow$ Predpokladajme, že $r$-množinový podsystém $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ má transverzálu. Nech tento podsystém tvoria množiny $A_1$, $A_2$, …, $A_r$ s transverzálou $x_1$, …, $x_r$. Nech $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{n-r}\}$. Potom zrejme $x_1$, …, $x_r$, $y_1$, $y_2$, …, $y_{n-r}$ je transverzála systému $A_1 \cup Y$, $A_2 \cup Y$, …, $A_n \cup Y$.

$\Leftarrow$ Nech $A_1 \cup Y$, $A_2 \cup Y$, …, $A_n \cup Y$ má transverzálu $w_1$, …, $w_n$. Keďže $Y$ má $n - r$ prvkov, tak aspoň $r$ prvkov z $w_1$, …, $w_n$ patrí do $X$. Nech sú to prvky $w_1$, …, $w_r$. Potom $w_1 \in A_1$, $w_2 \in A_2$, …, $w_r \in A_r$, čiže systém $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ obsahuje $r$-množinový podsystém $A_1$, $A_2$, …, $A_r$, ktorý má transverzálu.

Podľa Hallovej vety má systém $A_1 \cup Y$, $A_2 \cup Y$, …, $A_n \cup Y$ transverzálu práve vtedy, keď pre každé $k = 1, 2, \ldots, n$ a pre každý výber $i_1$, $i_2$, …, $i_k$ taký, že $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ platí

$$|(A_{i_1} \cup Y) \cup (A_{i_2} \cup Y) \cup \cdots \cup (A_{i_k} \cup Y)| \ge k. \tag{11.2}$$

Nakoľko

$$\begin{aligned}|(A_{i_1} \cup Y) \cup (A_{i_2} \cup Y) \cup \cdots \cup (A_{i_k} \cup Y)| &= |(A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}) \cup Y)| = \\ &= |A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| + |Y| = |A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| + n - r,\end{aligned}$$

tak (11.2) platí práve vtedy, keď

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| \ge k - (n - r).$$

□

*