5 Teória grafov – úvod

5.1 Základné pojmy

Mnoho situácií v matematike, informatike a praxi je možné vystihnúť pomocou schématu pozostávajúceho hlavne z dvoch vecí:

- (konečnej) množiny bodov – vrcholy, uzly (mestá na mape),
- spojníc medzi týmito bodmi – hrany (cesty medzi mestami).

Matematickou abstrakciou podobných schémat je pojem *grafu*.

Definition 5.1 *Obyčajný graf G je dvojica (V, E), kde V je množina vrcholov grafu G a E, množina hrán grafu G, je množinou dvojprvkových podmnožín množiny V:*

$$E \subseteq \binom{V}{2} = \{e, e \subseteq V, |e| = 2\}.$$

Grafy, ktoré budeme uvažovať budú konečné, t.j. $|V|$, $|E| < \infty$. Ak vrcholy u, v sú spojené hranou v grafe, zapisujeme $\{u, v\}$ a hovoríme, že vrchol u je susedom vrchola v (resp. naopak).

Grafy sa znázorňujú obvykle kreslením do roviny. Vrcholom sa priradia body roviny a hrany sa vyjadria spojením príslušných dvojíc bodov rovnými alebo všelijak zakrivenými čiarami.

Obrázok má však pomocnú úlohu a jeden graf je možné zakresliť mnohými rôznymi spôsobmi. Pre prehľadnosť kreslenia je dobré, aby sa oblúky priradené hranám čo najmenej krížili (rovinné grafy).

Dôležité grafy. Pre $n \in N$ označujeme K_n úplny graf na n vrcholoch (t.j. n vrcholov a všetky možné hrany), kružnica C_n ($V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $E = \{\{i, i+1\}; i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\}$), cesta P_n ($V = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $E = \{\{i-1, i\}; i = 1, \ldots, n\}$), úplne bipartitné grafy $K_{m,n}$.

Niekedy sa uvažujú grafy aj s viacnásobnými hranami, slučkami, ohodnotené grafy.

5.2 Izomorfizmus grafov

Dva grafy sa považujú za rovnaké, ak majú totožné množiny vrcholov a hrán. Mnoho grafov sa líši len označením svojich vrcholov a hrán. To vystihuje pojem izomorfizmu.

Definition 5.2 *Dva grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ sú izomorfné $G \xrightarrow{\sim}= G'$, ak existuje vzájomne jednoznačné priradenie (izomorfizmus) $f\ V \to V'$ tak, že platí:*

$$\{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in E'.$$

Problém rozhodnúť, či dva grafy sú izomorfné je „tažký“ a žiadny efektívny algoritmus okrem prešetrenia všetkých možností zatiaľ nebol nájdený (a predpokladá sa, že ani neexistuje).

Počet neizomorfných grafov. Na danej n-prvkovej množine V je práve $2^{\binom{n}{2}}$ rôznych grafov, pretože E je podmožina $\binom{V}{2}$. Grafov, ktoré sú neizomorfné je podstatne menej. Napríklad pre $n = 3$ existuje 8 grafov, z toho sú len 4 neizomorfné.

Určiť presne počet neizomorfných grafov je pomerne ťažké, jednoduchou úvahou ale môžeme dostať aspoň dobré odhady: horný $2^{\binom{n}{2}}$ a dolný $\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$ vyplýva z faktu, koľko maximálne grafov na n prvkovej množine môže byť izomorfných s daným grafom.

Tvrdíme, že táto funkcia nerastie o mnoho pomalšie než $2^{\binom{n}{2}}$. Aby sme sa o tom presvedčili, zlogaritmujme obe funkcie a trochu ich upravme:

$$\log_2 \left[2^{\binom{n}{2}}\right] = \binom{n}{2} = \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right), \tag{5.1}$$

$$\log_2 \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} = \binom{n}{2} - \log_2 n! \geq \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - n \log_2 n \tag{5.2}$$

$$= \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{2\log_2 n}{n}\right). \tag{5.3}$$

Vidíme, že pre veľké n sa logaritmy oboch funkcií chovajú ako $\frac{n^2}{2}$.

Práve uvedená úvaha je pozoruhodná tým, že sme len ukázali existenciu veľkého množstva neizomorfných grafov, ale žiadne také grafy sme nezostrojili. Zostrojiť (popísať explicitnú konštruckiu) mnoho neizomorfných grafov nie je tak jednoduché.

5.3 Podgrafy, súvislosť grafu

Zadefinujeme si čo to znamená, že „jeden graf je obsiahnutý v druhom grafe“.

Definition 5.3 *Hovoríme, že graf G' je podgrafom G, ak $V(G') \subseteq V(G)$ a $E(G') \subseteq E(G)$.*

Hovoríme, že graf G' je indukovaným pografom grafu G, ak $V(G') \subseteq V(G)$ a $E(G) = E(G') \cap \binom{V(G)}{2}$.

Definition 5.4 *$G = (V, E)$ je obyčajný graf. Postupnosť $[v_0, e_1, v_1, e_1, \ldots, v_n, e_n]$ v grafe G, kde $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E$, $1 \leq i \leq n$ sa nazýva sled dĺžky n z v_0 do v_n. Ak $e_i \neq e_j$, pre $i \neq j$, hovoríme o ťahu. Ak $v_i \neq v_j$, hovoríme o ceste.*

Ak $v_0 = v_n$, hovoríme o uzavretom ťahu. Cesta, pre ktorú $v_0 = v_n$ nazývame kružnicou.

Zrejme v grafe existuje sled medzi dvoma vrcholmi práve vtedy, keď medzi nimi cesta.

Súvislosť, komponenty.

Definition 5.5 *Hovoríme, že graf G je súvislý, ak pre každé dva jeho vrcholu u a v v ňom existuje cesta z u do v.*

Pojem súvislosti je možné definovať aj ináč. Najprv definujme reláciu $\sim$ na množine $V(G)$ vzťahom $u \sim v$ práve keď v grafe G existuje cesta z u do v. Zrejme $\sim$ je ekvivalencia na V, ktorá definuje rozklad množiny V na triedy ekvivalencie – nazývajú sa komponenty súvislosti. Zrejme graf G je súvislý práve keď $k = 1$.

Rozhodnúť či graf je súvislý alebo nie, poprípade nájsť všetky jeho komponenty nie je obtiažne.

5.4 Skóre grafu

Definition 5.6 *Nech $G = (V, E)$ je obyčajný graf. Stupeň vrcholu v v grafe G je definovaný:*

$$deg_G v = |\{e, v \in e \in E\}|.$$

(Niekedy budeme dolný index G vynechávať, ak bude z kontextu jasné, v ktorom grafe stupeň definujeme. Tiež sa niekedy používa namiesto $deg_G v$ značenie $d_G(v)$, resp. $d(v)$.)

Lemma 5.1 *V konečnom grafe G s n vrcholmi $v_1, \ldots, v_n \in V(G)$ platí:*

$$\sum_{i=1}^{n} deg_G(v_i) = 2|E|.$$

Dôkaz. Zrejme každá hrana prispieva k dvom vrcholom. □

Poznámka. V konečnom obyčajnom grafe je počet vrcholov nepárneho stupňa párne číslo. Nemôže existovať graf, ktorý by obsahoval jediný vrchol nepárneho stupňa.

Definition 5.7 *Nech $G = (V, E)$ je obyčajný graf. Súbor $(d_G(v), v \in V)$, sa nazýva skóre grafu G.*

Dve skóre považujeme za rovnaké, ak jedno môžeme dostať z druhého prerovnávaním čísiel, t.j. skóre nezávisí na zvolenom poradí vrcholov. Je vidieť, že dva izomorfné grafy majú rovnaké skóre. Na druhej strane, grafy s rovnakým skóre ešte nemusia byť nutne izomorfné.

Veta 5.1 (Veta V. Havla) *Nech $D = (d_1, \ldots, d_n)$ je postupnosť prirodzených čísel, $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$. Označme D' postupnosť $(d'_1, d'_2, \ldots, d'_{n-1})$, kde:*

$$d'_i = \begin{cases} d_i, & pre\ i < n - d_n, \\ d_i - 1, & pre\ i \geq n - d_n. \end{cases}$$

Potom D je skóre grafu práve keď D' je skóre grafu.

Dôkaz. $\Leftarrow$ Predpokladajme, že D' je skóre grafu $G' = (V', E')$, kde $V' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a $d_G(v_i) = d'_i$. Zvoľme nový vrchol v_n rôzny od $v_1, \ldots, v_{n-1}$ a definujme nový graf $G = (V, E)$, kde

$$V = V' \cup \{v_n\},$$
$$E = E' \cup \{\{v_i, v_n\}; i \in \{n - d_n, n - d_n + 1, \ldots, n - 1\}\}.$$

Zrejme skóre grafu G je práve D.

$\Rightarrow$ Predpokladajme, že D je skóre nejakého grafu. Uvažujme množinu $\mathcal{G}$ všetkých grafov na množine vrcholov $\{v_1, \ldots, v_n\}$ so skóre D v ktorých je stupeň každého vrcholu v_i rovný d_i. Predpokladajme, že máme dokázané nasledujúce lemátko:

Lemátko. V množine $\mathcal{G}$ existuje graf G_0, v ktorom je vrchol v_n spojený práve s poslednými d_n vrcholmi, t.j. $v_{n-d_n}, v_{n-d_n+1}, \ldots, v_{n-1}$.

Potom je už vec jednoduchá. Zoberieme graf $G' = (\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}, E')$, kde $E' = \{e \in E(G_0); v_n \notin e\}$, ktorý má zrejme skóre D', čím je dôkaz hotový.

Dôkaz lemátka. Ak $d_n = n-1$, t.j. vrchol v_n je spojený so všetkými vrcholmi $v_1, \ldots, v_{n-1}$, vyhovuje lemátku ľubovoľný graf z $\mathcal{G}$ a sme hotoví. Ináč, t.j. pokiaľ v_n nie je spojený so všetkými ostatnými vrcholmi, definujme pre každý graf $G \in \mathcal{G}$ číslo $j(G)$, čo bude najväčší index $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ taký, že $\{v_j, v_n\} \notin E(G)$. Buď G_0 graf, pre ktorý je $j(G)$ najmenšie možné; dokážeme, že $j(G_0) = n - d_n - 1$, z čoho je už zrejmé, že G_0 vyhovuje pomocnému tvrdeniu.

Predpokladajme teda pre spor, že $j = j(G_0) > n - d_n - 1$. Vrchol v_n musí byť spojený s d_n vrcholmi, a z nich najviac $d_n - 1$ môže nasledovať po vrchole v_j. Preto existuje nejaké $i < j$ také, že v_i je spojený s vrcholom v_n. Máme teda $\{v_j, v_n\} \notin E(G_0)$, $\{v_i, v_n\} \in E(G_0)$. Vzhľadom k tomu, že $d_{G_0}(v_i) \le d_{G_0}(v_j)$, existuje nejaký vrchol v_k, ktorý je spojený hranou s v_j, ale nie s v_i. V takomto prípade uvážime nový graf $G' = (V(G_0), E')$, kde

$$E' = (E(G_0) \setminus \{\{v_i, v_n\}, \{v_j, v_k\}\}) \cup \{\{v_j, v_n\}, \{v_i, v_k\}\}.$$

Je zrejmé, že graf G' má tiež skóre D a pritom $j(G') \le j(G_0) - 1$, čo je spor s voľbou grafu G_0. Tým je lemátko a celá veta dokázaná. $\square$

Príklad. Ak máme o nejakej postupnosti $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5)$ rozhodnúť, či je skóre grafu, podľa predchádzajúcej vety táto postupnosť je skóre $\Leftrightarrow$ keď $(1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4)$ je skóre nejakého grafu $\Leftrightarrow (1, 1, 1, 0, 0, 1, 2)$ $\Leftrightarrow (0, 0, 1, 1, 1, 1, 2)$ (prerovanie čísel) $\Leftrightarrow (0, 0, 1, 1, 0, 0) \Leftrightarrow (0, 0, 0, 0, 1, 1)$ (prerovanie čísel) $\Leftrightarrow (0, 0, 0, 0, 0)$.

O poslednej postupnosti už vieme určite prehlásiť, že je skóre nejakého grafu (izolovaných 5 vrcholov). Iným problémom je konštrukcia grafu so zadaným skóre. Táto sa dá realizovať postupným pridávaním vrcholu a hrán podľa predchádzajúcej vety.