1 Rekurentné problémy

Mnohé kombinatorické problémy sa riešia prevádzaním daného problému na riešenie menších prípadov, ktoré už vieme vyriešiť. Takejto metóde sa hovorí *metóda rekurencie* (z latinského recurrere – vracať). Nasledujúce motivačné príklady sú klasickými príkladmi na túto metódu a boli matematikmi mnohokrát vyšetrované.

Motivačný príklad na počet permutácií, Fibonacciho číslo ...

1.1 Motivačné príklady na rekurencie

1.1.1 Vznik šachu

Šach vznikol pravdepodobne v Indii, pričom génius, ktorý vymyslel túto nádhernú hru si vraj zapýtal len „skromnú" odmenu. Žiadal, aby mu radža vyplatil za prvé políčko zrnko obilia, za druhé dve zrnká a za každé ďalšie políčko dvojnásobok predošlého. Koľko obilia mu má radža vyplatiť?

Riešenie Označme p_n počet zrniek obilia, ktoré má vynálezca dostať za n-té políčko. Priamo zo zadania vyplýva rekurentný vzťah $p_n = 2 \cdot p_{n-1}$, ktorá platí pre každé $n \geq 2$. Postupným iterovaním dostávame

$$p_n = 2 \cdot p_{n-1} = 2^2 \cdot p_{n-2} = \ldots = 2^{n-1} \cdot p_1.$$

Teda za všetky polia šachovnice dostane spolu:

$$\sum_{i=1}^{64} 2^{i-1} = \sum_{i=0}^{63} 2^i = \frac{2^{64}-1}{2-1} > 16 \cdot 1\,000^6 = 16 \cdot 10^{18}$$

zrniek obilia. Ak uvážime váhu zrnka obilia tak dostávame, že vynálezca žiadal viac ako 100 000 000 000 ton obilia, čo samozrejme nedostal.

1.1.2 Hanojské veže

Boli vymyslené francúzskym matematikom Eduardom Lucasom v roku 1883. Máme danú vežu zostavenú z 8 diskov, ktoré sú na začiatku umiestnené na kolíku A a usporiadané podľa veľkosti od najväčšieho po najmenší. Úlohou je preniesť vežu z kolíka A na iný kolík B, pričom:

- máme k dispozícii jeden pomocný kolík C,
- môžeme prenášať vždy len jeden disk,
- nesmieme nikdy položiť väčší disk na menší.

Lucas opriadol svoju hračku romantickým príbehom o oveľa väčšej Brahmovej veži, ktorá má údajne 64 diskov z rýdzeho zlata navlečených na 3 diamantových ihliciach. Na počiatku vekov, vraví, dal Boh tieto zlaté disky na prvú ihlicu a stanovil skupine kňazov preniesť ich na tretiu, podľa hore uvedených pravidiel. Ako hovoria správy, kňazi pracujú na úlohe dňom a nocou. Keď skončia, veža sa rozpadne a svet zanikne.

Na prvý pohľad nie je ani zrejmé, či hlavomam má vôbec riešenie. Ale trocha premýšľania nás presvedčí, že má. Teraz vyvstane otázka: ako sa to dá urobiť najlepšie? Koľko presunov je nevyhnutných a postačujúcich na vyriešenie úlohy?

Najlepší spôsob, ako vyriešiť podobnú otázku, je trochu ju zovšeobecniť. Brahmova veža má 64, Hanojská veža 8; uvažujme čo sa stane, keď diskov bude n.

Jednou z nesporných výhod takéhoto zovšeobecnenia je, že problém sa môže ešte zmenšiť. Naozaj, niekedy je výhodné najprv sa pozerať na *malé prípady*. Je možné veľmi ľahko nahliadnuť, ako prenášať vežu obsahujúcu len 1, či 2 disky. S troškou experimentovania zistíme, ako prenášať vežu z 3 diskov.

Ďalší krok v riešení problému je zaviesť vhodné označenie: *vhodne označ a zvíťaz.* Nech povedzme T_n je minimálny počet presunutí, ktorými prenesieme n diskov z jedného kolíka na druhý dodržiavajúc pritom Lucasove pravidlá. Potom zrejme $T_1 = 1$ a $T_2 = 3$.

Zadarmo môžeme získať ešte nejaké informácie, ak zoberieme najmenší prípad zo všetkých: samozrejme $T_0 = 0$. Rozumní matematici sa nehanbia myslieť v malom, pretože všeobecné prípady sú ľahšie pochopiteľné, keď dobre rozumieme extrémnym prípadom (aj keď sú triviálne).

Teraz sa ale snažme myslieť vo veľkom. Najprv prenesieme $n-1$ menších diskov na iný kolík (čo vyžaduje T_{n-1} presunov), potom prenesieme najväčší (čo vyžaduje 1 presun) a nakoniec preniesť $n-1$ menších diskov späť na väčší (čo vyžaduje ďalších T_{n-1} presunov). Teda n diskov vieme preniesť na najviac $2T_{n-1}+1$ presunov:

$$T_n \leq 2T_{n-1} + 1, \quad \text{pre } n > 0.$$

V tomto vzťahu je zámerne použité ‚$\leq$' namiesto ‚$=$' pretože náš spôsob len ukazuje, že $2T_{n-1}+1$ presunov stačí ale neukázali sme, že $2T_{n-1}+1$ je nevyhnutných. Niekto rozumnejší by mohol byť schopný vymysliet postup vyžadujúci menej presunov.

Existuje však ešte lepší spôsob? V skutočnosti nie. V istej chvíli musíme presunúť najväčší disk. Keď ho budeme prenášať, $n-1$ menších diskov musí byť na jednom kolíku, na čo sme potrebovali aspoň T_{n-1} presunov. Ak nie sme príliš šikovný, môžeme presúvať najväčší disk aj viackrát. Ale po poslednom presune musíme presunúť menších $n-1$ diskov (ktoré musia byť opäť na jednom kolíku) späť na najväčší; čo zase vyžaduje T_{n-1} presunov. Teda

$$T_n \geq 2T_{n-1} + 1, \quad \text{pre } n > 0.$$

Tieto dve nerovnosti, spolu s triviálnym riešením pre $n = 0$ dávajú:

$$\begin{aligned} T_0 &= 0; \\ T_n &= 2T_{n-1} + 1, \quad \text{pre } n > 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Všimnime si, že tieto vzťahy sú konzistné so známymi hodnotami $T_1 = 1$ a $T_2 = 3$.

Množina rovností sa nazýva *rekurencia.* Má základné hodnoty a rovnosť na výpočet všeobecnej hodnoty na základe predchádzajúcich. Niekedy sa odvolávame na samostanú všeobecnú rovnosť ako na rekurenciu, i keď niekedy z technického hľadiska, kvôli úplnosti, potrebujeme aj základné hodnoty.

Rekurencia nám umožňuje vypočítať T_n pre ľubovoľné n. Ale v skutočnosti, keď je n veľké, nik rád nepočíta priamo z rekurencie; trvá to pridlho. Rekurencia nám dáva len nepriamu „lokálnu" informáciu. Oveľa šťastnejšími nás spraví *riešenie rekurencie.* To je to, čo by sa nám páčilo, milý malý uzavretý tvar pre T_n, pomocou ktorého by sme mohli rýchlo počítať, hoci aj pre veľké n.

Ako teda riešime rekurencie? Jeden spôsob je uhádnuť správne riešenie a potom o ňom dokázať, že je naozaj správne. Ak chceme teda hádať, pozrime sa opäť na najmenšie prípady. Tak teda počítajme postupne: $T_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$; $T_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$; $T_5 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$; $T_6 = 2 \cdot 31 + 1 = 63$. Aha, vyzerá to ako

$$T_n = 2^n - 1, \quad \text{pre } n \geq 0. \tag{1.2}$$

Každopádne to funguje aspoň pre $n \leq 6$.

Najvhodnejším spôsobom pre dôkaz správnosti riešenia je matematická indukcia. Spomínate si? Báza a indukčný predpoklad! Báza je triviálna, pretože $T_0 = 2^0 - 1 = 0$. A indukčný krok vyplýva pre $n > 0$, ak predpokladáme, že (1.2) platí, keď n nahradíme $n-1$:

$$T_n = 2T_{n-1} + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1.$$

Teda (1.2) platí aj pre n. Dobré! Naše hľadanie T_n sa skončilo úspešne!

Ale práca kňazov sa naproti tomu neskončila. Ako oznámila tlačová agentúra ITKA, stále usilovne prenášajú disky a ešte chvíľu aj budú, pretože pre $n = 64$ treba vykonať $2^{64} - 1$ presunov. A aj pri neuskutočniteľnej rýchlosti presúvania diskov, každú mikrosekundu 1 disk, by potrebovali viac než 5000 storočí na prenesenie celej Brahmovej veže. Lucasov pôvodný problém je trochu praktickejší. Vyžaduje $2^8 - 1 = 255$ presunov, čo zručnému trvá asi štyri minúty.

Naša analýza Hanojských veží nás doviedla k správnemu riešeniu, ale mali sme zrovna šťastie pri typovaní výsledku, ktorý sa ukázal ako správny. Jedným z hlavných cieľom tejto časti prednášok bude vysvetliť, ako sa dajú rekurencie riešiť (alebo aspoň asymptoticky odhadnúť) bez toho, aby sme boli jasnovidci. Napríklad uvidíme, že rekurenciu (1.1) môžeme zjednodušiť pripočítaním 1 k obom stranám rovnice:

$$T_0 + 1 = 1;$$
$$T_n + 1 = 2T_{n-1} + 2, \quad \text{pre } n > 0.$$

Teraz, ak položíme $U_n = T_n + 1$, dostaneme

$$U_0 = 1;$$
$$U_n = 2U_{n-1}, \quad \text{pre } n > 0.$$

A nemusíme byť zrovna génius nato, aby sme zistili, že riešenie tejto rekurencie je práve $U_n = 2^n$; teda $T_n = 2^n - 1$. Na to by snáď prišiel aj počítač.

Krátke zhrnutie Rekurencia Hanojských veží je typická pre mnohé rekurencie, ktoré sa vyskytujú v aplikáciach všetkých druhov. Pri hľadaní uzavretých foriem pre zaujímavé veličiny vyzerajúce ako T_n, prechádzame tromi etapami:

- Pozrieme sa na malé prípady. Čím vnikneme do problému a pomôže nám to (možno) v 2. a 3. etape.
- Nájdeme a dokážeme matematický vzťah pre veličinu, ktorá nás zaujíma. V prípade Hanojských veží je to rekurencia (1.1), ktorá nám umožní vypočítať T_n pre každé n.
- Nájdeme a dokážeme uzavretú formu pre náš matematický vzťah. Pre Hanojské veže je to riešenie rekurencie (1.2).

My sa budeme sústreďovať predovšetkým na tretiu etapu.

Komentár Na začiatku sme vraveli o uzavretých tvaroch bez toho, aby sme exaktne povedali, čo tým myslíme. Obyčajne je to celkom jasné. Rekurencie typu (1.1) nie sú v uzavretom tvare – vyjadrujú veličiny sami pomocou seba; ale riešenia typu (1.2) sú v uzavretom tvare. Sumy ako $1 + 2 + \cdots + n$ nie sú v uzavretom tvare – klamú „...“; ale výrazy typu $\frac{n(n+1)}{2}$ sú. Skúsme to definovať: výraz vyjadrujúci veličinu $f(n)$ je v uzavretom tvare, ak ho môžeme vypočítať nanajvýš s konštantným počtom „dobre známych“ štandardných operácií, nezávislých od n. Napríklad, $2^n - 1$ a $\frac{n(n+1)}{2}$ sú v uzavretom tvare, pretože vyžadujú explicitne len sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie a umocňovanie.

Celkový počet jednoduchých uzavretých tvarov je obmedzený. Existujú rekurencie, ktoré nemajú jednoduché uzavreté tvary. Keď sa niektorá z týchto rekurencií bude ukazovať dôležitá, pretože sa bude opakovane vyskytovať, rozšírime náš repertoár o nové oprácie; týmto spôsobom môžeme široko rozšíriť škálu problémov, ktoré vieme vyriešiť v „jednoduchej“ uzavretej forme. Napríklad, súčin prvých n celých čísel, $n!$, sa ukázal byť dôležitý, tak ho budeme považovať za základnú operáciu.

1.1.3 Jozefova úloha

Najskôr trochu histórie. Nasledujúca úloha bola pomenovaná po známom historikovi prvého storočia, Flaviusovi Jozefovi. Podľa legendy, by Flavius bez matematického nadania neprežil a nestal sa slávnym (a taktiež by nám nemohol porozprávať svoj príbeh). Počas Židovsko-Rímskej vojny, bol medzi 41 židovskými vzbúrencami, ktorých Rimania chytili do pasce v jaskyni. Vzbúrenci sa rozhodli, že radšej ako by sa vzdali, spáchajú organizovane samovraždu nasledovným spôsobom: vytvoria kruh a postupujúc v ňom krok po kroku každý tretí spácha samovraždu, až pokým nikto neostane. Ale Jozef ešte s jedným priateľom nesúhlasil s touto nezmyselnou samovraždou a rýchlo si vypočítal kam sa má on a jeho priateľ v začarovanom kruhu postaviť.

V našom variante začneme s n ľuďmi, očíslovanými v kruhu od 1 až po n a budeme z neho vylučovať každého druhého, pokým nezostane len jeden. Bojová úloha: určite číslo prežívajúceho, označme si ho J_n.

Určime si pokusne J_{10}. A čo zisťujeme, že číslo 5 žije!!! A teraz ako obvykle, spočítajme si niekoľko malých hodnôt:

n	1	2	3	4	5	6
J_n	1	1	3	1	3	5

Zdá sa, že J_n je vždy nepárne číslo. A vskutku je preto dobrý dôvod: prvý prechod po kruhu vylúči všetky párne čísla.

Predpokladajme, že pôvodne máme $2n$ ľudí. Po prvom prejdení kruhu sa nám zredukoval počet ľudí na n. Vyriešme úlohu pre n, dostaneme číslo J_n. Vieme z tohto výsledku zrekonštruovať výsledok pre pôvodný počet? Samozrejme,

$$J_{2n} = 2J_n - 1, \quad \text{pre } n \geq 1.$$

A čo v nepárnom prípade? V prípade $2n + 1$ ľudí sa ukáže, že osoba číslo 1 je vylúčená po osobe číslo $2n$. Analogicky ako v predchádzajúcom prípade dostávame sa do počiatočnej situácie s n ľuďmi. Vyriešime úlohu pre n a zistíme, že tentoraz sú ich čísla dvojnásobné a zvýšené o 1. Teda

$$J_{2n+1} = 2J_n + 1, \quad \text{pre } n \geq 1.$$

Skombinovaním týchto rovníc s $J_1 = 1$ dostaneme rekurenciu, ktorá definuje J vo všetkých prípadoch:

$$\begin{aligned} J_1 &= 1, \\ J_{2n} &= 2J_n - 1, \quad \text{pre } n \geq 1, \\ J_{2n+1} &= 2J_n + 1, \quad \text{pre } n \geq 1. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Táto rekurencia je oveľa efektívnejšia ako predchádzajúce, pretože pri každom použití zmenšuje n dva alebo viackrát. Mohli by sme vypočítať, povedzme $J(10000000)$ len 18-násobným použitím (1.3). Ale pretože život je tak krásny, ešte stále hľadáme uzavretú formulu, pretože pomocou nej to bude ešte rýchlejšie a o mnoho poučnejšie. Koniec koncov, je to otázka života a smrti.

Pri pohľade na (1.3) nás však nič múdre nenapadá a tak si skúsme rozpísať viacej hodnôt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
J_n	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Ej, hľa... Začína nám svitať. Zdá sa, že môžeme vytvoriť skupiny podľa mocnín 2 (v tabuľke oddelené zvislými čiarami); J_n je na začiatku skupiny vždy 1 a postupne sa v rámci skupiny zväčšuje o 2. Teda ak si napíšeme n v tvare $n = 2^m + l$, kde 2^m je najväčšia mocnina 2 neprevyšujúca n a l je to, čo ostalo, riešenie našej rekurencie vyzerá potom takto:

$$J_{2^m+l} = 2l + 1, \quad \text{pre } m \geq 0 \text{ a } 0 \leq l < 2^m. \tag{1.4}$$

Pre našu úplnu spokojnosť musíme ešte vzťah (1.4) dokázať. Ako aj predtým, použijeme indukciu, tentokrát vzhľadom na m (t.j. na celú skupinu 2^m, $2^m + 1$, $2^m + 2$, ..., $2^m + 2^m - 1$). Keď $m = 0$, tak musí byť $l = 0$ a báza sa redukuje len na $J_1 = 1$, čo zrejme platí. Indukčný krok má dve časti v závislosti od toho, či je l párne alebo nepárne. Ak $m > 0$ a $2^m + l = 2n$, tak potom je l párne a

$$J_{(2^m+l)} = 2J_{(2^{m-1}+l/2)} - 1 = 2(2 \cdot l/2 + 1) - 1 = 2l + 1,$$

podľa (1.3) a indukčného predpokladu, čo sme vlastne chceli. Podobný dôkaz zaberie i v prípade nepárneho l. (Skúste si to, či ste ešte nezabudli indukciu.)

Tak, či onak, indukcia je kompletná a výsledok (1.4) nepopierateľný.

Elegantnejší prístup. Teraz si môžme prezradiť, že existuje aj elegantnejšie riešenie uvedeného problému. Kľúčovým je fakt, že $J_{2^m} = 1$ pre všetky m. Vo všeobecnom prípade, keď $n = 2^m + l$ sa počet osôb zmení na mocninu 2 potom, ako vylúčime z kruhu l osôb. Osoba, ktorá je na rade prežije a jej číslo je práve $2l + 1$.

Magický súvis s dvojkovou sústavou? V našom hľadaní riešenia hrajú dôležitú úlohu mocniny 2, takže je len prirodzené pozrieť si binárnu reprezentáciu n a J_n. Uvažujme binárny zápis n

$$n = (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2;$$

to je

$$n = b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \dots + b_1 2 + b_0,$$

kde každé b_i je buď 0 alebo 1 a vedúci bit b_m je 1. Ak si spomenieme, že $n = 2^m + l$, dostaneme,

$$\begin{aligned} n &= (1b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1 b_0)_2, \\ l &= (0b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1 b_0)_2, \\ 2l &= (b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1 b_0 0)_2, \\ 2l+1 &= (b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1 b_0 1)_2, \\ J_n &= (b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1 b_0 b_m)_2, \end{aligned}$$

Dokázali sme teda, že

$$J((b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2) = (b_{m-1} \dots b_1 b_0 b_m)_2,$$

čo v reči programátorov znamená, že J_n dostaneme z n cyklickým posunom o jeden bit doľava! Magické. Napríklad, ak $n = 100 = (1100100)_2$, tak $J_n = J((1100100)_2) = (1001001)_2$, čo je 73. Keby sme pracovali celý čas v dvojkovej sústave, pravdepodobne by sme si to všimli hneď.

1.2 Metódy riešenia rekurentných rovníc

1.2.1 Riešenie lineárnych homogénnych rovníc s konštantnými koeficientami

Príklad na úvod. V knihe „Liber Abaci“, ktorá sa objavila v roku 1202 uviedol taliansky matematik Leonardo Pisanský, zvaný Fibonacci, túto úlohu:

Pár králikov privádza jedenkrát za mesiac na svet dve mláďatá (samčeka a samičku), ktorí prinášajú ďalšie prírastky už za dva mesiace po svojom narodení. Koľko králikov sa objaví za rok ak predpokladáme, že na začiatku roku bol jeden pár králikov.

Označme F_n symbolom počet králikov po n mesiacoch od začiatku roku. Vidíme, že za $n+1$ mesiacov budeme mať týchto F_n párov a naviac ešte toľko novorodených párov králikov, koľko ich bolo na konci $(n-1)$-ého mesiaca, t.j. F_{n-1}. Dostávame teda rekurentný vzorec:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n > 1 \tag{1.5}$$

Počiatočné podmienky $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Ako ale vyzerá uzavretá formula pre F_n, tzv. n-té Fibonacciho číslo?

Ak postupnosti $\{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$, $\{y_0, y_1, \dots, y_n, \dots\}$ sú riešením (1.5), potom aj ich súčet, resp. násobok skalárom z $\mathbb{R}$ je riešením (1.5). Teda priestor riešení (1.5) je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$. Aká je jeho dimenzia? Voľbou prvých dvoch členov máme jednoznačne určenú celú postupnosť, dimenzia je teda 2.

Skúsme hľadať riešenie F_n v tvare r^n pre nejaké $r \in \mathbb{C}$. Po prepise (1.5) dostávame

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}, \qquad n > 1.$$

Prípad $r = 0$ je nezaujímavý, po vydelení r^{n-2} dostávame: $r^2 = r + 1$ s koreňmi $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ani jedno s uvedených riešení nespĺňa inicializačné podmienky úlohy, podľa úvodných úvah však ľubovoľná lineárna kombinácia koreňov r_1 a r_2 je tiež riešením. Hľadáme teda λ, μ také, že

$$\begin{aligned} \lambda r_1^0 + \mu r_2^0 &= F_0 = 0, \\ \lambda r_1^1 + \mu r_2^1 &= F_1 = 1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Riešením systému (1.6) zistíme, že $\lambda = -\mu = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Dostávame teda riešenie (1.5) v tvare:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

A ako obvykle, nasleduje skúška správnosti matematickou indukciou.

Zobecnenie predchádzajúceho:

Definition 1.1 *Uvažujme lineárnu homogénnu rekurentnú rovnicu s konštantnými koeficientami $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$:*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_k u_{n-k}, \text{ pre } n \geq k, \tag{1.7}$$

(induktívna rovnica)

$$u_i = b_i, \text{ pre } 0 \leq i < k, \ b_i \in \mathbb{R}$$

(inicializačné podmienky)

Pre $a_k \neq 0$, potom hovoríme o rovnici k-teho stupňa.

Označme $P(r) = r^k - \sum_{j=1}^k a_j r^{k-j}$ charakteristický polynóm k-teho stupňa induktívnej rovnice a $P(r) = 0$ jej charakteristickú rovnicu. Korene $P(r)$ nazývame charakteristické korene.

Lemma 1.1 *Nech r je komplexné číslo (môže byť samozrejme aj reálne), $r \neq 0$. Potom r^n je riešením induktívnej rekurentnej rovnice* (1.7) *práve vtedy, keď r je jej charakteristickým koreňom.*

Dôkaz. Výraz r^n je riešením induktívnej rovnice (1.7) práve vtedy, keď platí

$$r^n - a_1 r^{n-1} - \dots - a_k r^{n-k} = 0$$

pre každé $n \geq k$. Nakoľko je $r \neq 0$, tak je predošlá rovnica ekvivalentná rovnici

$$r^k - a_1 r^{k-1} - \dots - a_k = 0.$$

Čiže r^n je riešením induktívnej rovnice (1.7) práve vtedy, keď je r jej charakteristickým koreňom. □

Podľa základnej vety algebry má charakteristická rovnica k-teho stupňa najviac k koreňov v $\mathbb{R}$ (nad komplexnými číslami práve k), pričom každý koreň počítame so svojou násobnosťou.

Veta 1.1 *Ak charakteristická rovnica má k rôznych koreňov $r_1, r_2, \dots, r_k$, potom rekurencia* (1.7) *má riešenie tvaru*

$$u_n = \sum_{j=1}^k \lambda_j r_j^n \tag{1.8}$$

kde λ_i sú riešenia systému lineárnych rovníc:

$$b_i = \sum_{j=1}^k \lambda_j r_j^i, \text{ pre } 0 \leq i < k.$$

Dôkaz. Najskôr ukážeme, že (1.8) je riešením induktívnej rovnice (1.7). Keďže $r_1, r_2, \dots, r_k$ sú jej charakteristické korene, podľa predchádzajúcej lemmy platí pre každé $j = 1, 2, \dots, k$

$$r_j^n - a_1 r_j^{n-1} - \dots - a_k r_j^{n-k} = 0$$

a ak c_j je ľubovoľné reálne číslo, platí tiež

$$c_j r_j^n - a_1 (c_j r_j^{n-1}) - \dots - a_k (c_j r_j^{n-k}) = 0.$$

Sčitaním týchto rovníc dostávame, že

$$\sum_{j=1}^k c_j r_j^n$$

je riešením induktívnej rovnice (1.7) pre ľubovoľné reálne čísla $c_1, c_2, \dots, c_k$.

Ostáva dokázať, že existujú $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ také, že riešenie (1.8) vyhovuje inicializačným podmienkam. Uvažujme nasledujúci systém k lineárnych rovníc s k neznámymi $x_1, \ldots, x_k$:

$$\begin{aligned} b_0 &= x_1 + \cdots + x_k, \\ b_1 &= x_1 r_1 + \cdots + x_k r_k, \\ b_2 &= x_1 r_1^2 + \cdots + x_k r_k^2, \\ &\ldots \\ b_{k-1} &= x_1 r_1^{k-1} + \cdots + x_k r_k^{k-1}. \end{aligned}$$

Matica tohto systému je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_k \\ r_1^2 & r_2^2 & \ldots & r_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \ldots & r_k^{k-1} \end{pmatrix},$$

čo je známa Vandermondova matica. Jej determinant je rovný $\prod(r_j - r_i)$, kde súčin je uvažovaný cez všetky dvojice r_j a r_i, pre ktoré je $j > i$. Keďže korene sú všetky navzájom rôzne, tak determinant je nenulový a teda existuje jediné riešenie systému, označme ho $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. $\square$

Veta 1.2 *Ak charakteristická rovnica má p rôznych koreňov $r_1, \ldots, r_p$, $p < k$ a koreň r_j má násobnosť $m_j \geq 1$, potom*

$$r_j^n, nr_j^n, n^2 r_j^n, \ldots, n^{m_j-1} r_j^n \tag{1.9}$$

sú tiež riešenia induktívnej rovnice a existuje riešenie spĺňajúce inicializačné podmienky v tvare:

$$u_n = \sum_{j=1}^{p} P_j(n) r_j^n,$$

kde $P_j(n)$ je polynóm stupňa $(m_j - 1)$, koeficienty ktorého môžu byť obdržané ako jednoznačné riešenie systému lineárnych rovníc:

$$b_i = \sum_{j=1}^{p} P_j(i) r_j^i, \ 0 \leq i < k.$$

Dôkaz. (Len náznak). Nech r_j je m_j-násobný ($m_j > 1$) koreň charakteristického polynómu $P(r)$ induktívnej rovnice (1.7). Potom je r_j určite tiež m_j-násobným koreňom rovnice

$$r^{n-k} P(r) = r^n - a_1 r^{n-1} - \cdots - a_k r^{n-k} = 0,$$

čiže r_j^n je riešením induktívnej rekurentnej rovnice. Ale potom r_j je určite tiež $(m_j - 1)$-násobný koreň derivácie polynómu $r^{n-k}P(r)$. Po vynásobení tejto derivácie r dostávame, že r_j je $(m_j - 1)$-násobný koreň

$$nr^n - a_1(n-1)r^{n-1} - a_2(n-2)r^{n-2} - \cdots - a_k(n-k)r^{n-k} = 0,$$

čo znamená, že nr_j^n je riešením induktívnej rovnice (1.7). Podobne možno pokračovať aj ďalej, pričom každú deriváciu ihneď vynásobíme r.

Koeficienty sú potom dopočítané riešením lineárnej sústavy k rovníc s k neznámymi. Vzniknutá matica je zovšeobecnenou Vandermondovou maticou a jej determinant je naozaj nenulový. $\square$

Príklad. Riešte rekurentnú rovnicu

$$u_n = 5u_{n-1} - 8u_{n-2} + 4u_{n-3}, \ n \geq 3$$

s inicializačnými podmienkami: $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = 2$.

Koreňmi charakteristickej rovnice $r^3 = 5r^2 - 8r + 4$ sú $r_1 = 1$ a $r_2 = 2$ násobnosti 2. Riešenie je teda tvaru:

$$u_n = a + 2^n(b + cn),$$

kde a, b, c spĺňajú systém rovníc:

$$\begin{aligned} 0 &= a + (b + c \cdot 0) \cdot 2^0, \\ -1 &= a + (b + c) \cdot 2, \\ 2 &= a + (b + c \cdot 2) \cdot 2^2. \end{aligned}$$

Riešenie: $u_n = 6 + 2^n(-6 + \frac{5}{2}n)$. $\square$

1.2.2 Malé zobecnenie Jozefovej úlohy

Skúsme riešiť podobnú rekurenciu ako v Jozefovej úlohe, ale so zavedenými celočíselnými konštantami α, β a γ. Ako bude riešenie vyzerať teraz?

$$\begin{aligned} f(1) &= \alpha, \\ f(2n) &= 2f(n) + \beta, \quad \text{pre } n \geq 1, \\ f(2n+1) &= 2f(n) + \gamma, \quad \text{pre } n \geq 1. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Náš pôvodný problém bol pre $\alpha = 1$, $\beta = -1$ a $\gamma = 1$. Začnúc s $f(1) = \alpha$ a pokračujúc ďalej môžeme vytvoriť nasledujúcu všeobecnú tabuľku pre malé hodnoty n:

n	$f(n)$		
1	α		
2	2α	$+ \ \beta$	
3	2α		$+ \ \gamma$
4	4α	$+ \ 3\beta$	
5	4α	$+ \ 2\beta$	$+ \ \gamma$
6	4α	$+ \ \beta$	$+ \ 2\gamma$
7	4α		$+ \ 3\gamma$
8	8α	$+ \ 7\beta$	
9	8α	$+ \ 6\beta$	$+ \ \gamma$

Z uvedenej tabuľky je vidieť, že koeficient pri α je najväčšia mocnina 2 obsiahnutá v n . Ďalej, že medzi mocninami 2 koeficienty pri β klesajú od $n-1$ k 0 po 1 a koeficienty pri γ rastú od 0 k $n-1$ po 1. Preto, ak vyjadríme $f(n)$ v tvare

$$f(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma, \tag{1.11}$$

a vylúčime jeho závislosť na α, β a γ ukazuje sa, že:

$$\begin{aligned} A(n) &= 2^m, \\ B(n) &= 2^m - 1 - l, \\ C(n) &= l. \end{aligned}$$

Ako obyčajne, $n = 2^m + l$ a $0 \leq l < 2^m$, pre $n \geq 1$.

Uvedenú skutočnosť nie je ani príliš ťažké dokázať indukciou, ale my to robiť nebudeme. Namiesto toho si ukážeme iný spôsob, ako riešiť rekurenciu (1.10): voľbou špeciálnych hodnôt a ich vzájomnou kombináciou. Ilustrujme to uvážením špeciálneho prípadu $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, kedy sa $f(n)$ musí rovnať $A(n)$. Rekurencia (1.10) potom vyzerá takto:

$$\begin{aligned} A(1) &= 1, \\ A(2n) &= 2A(n), \quad \text{pre } n \geq 1, \\ A(2n+1) &= 2A(n), \quad \text{pre } n \geq 1. \end{aligned}$$

A skutočne je pravda (indukciou vzhľadom na m), že $A(2^m + l) = 2^m$.

V ďalšom kroku začneme s nejakou jednoduchou funkciou $f(n)$ a budeme hľadať konštanty (α, β, γ), ktorými je definovaná. Dosadením konštantnej funkcie $f(n) = 1$ dostaneme, že

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha, \\ 1 &= 2 \cdot 1 + \beta, \\ 1 &= 2 \cdot 1 + \gamma, \end{aligned}$$

a teda hodnoty $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1, -1)$ spĺňajúce tieto rovnice nám dajú

$$A(n) - B(n) - C(n) = f(n) = 1.$$

Podobne môžme dosadiť $f(n) = n$:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha, \\ 2n &= 2n + \beta, \\ 2n + 1 &= 2n + \gamma, \end{aligned}$$

Tieto rovnice platia pre všetky n, keď $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 1)$. A v podstate sme hotoví! Ukázali sme, že funkcie $A(n)$, $B(n)$ a $C(n)$ z (1.11), ktoré sú riešením (1.10) vo všeobecnosti, spĺňajú rovnice:

$$\begin{aligned} A(n) &= 2^m, \quad \text{pre } n = 2^m + l \text{ a } \; 0 \leq l < 2^m, \\ A(n) - B(n) - C(n) &= 1, \\ A(n) + C(n) &= n. \end{aligned}$$

Riešením uvedenej sústavy dostávame známe riešenie.

Tento prístup ilustruje prekvapivo užitočnú metódu *neurčitých koeficientov.* Najprv si zvolíme hodnoty parametrov, pre ktoré poznáme riešenie, tým dostaneme zoznam špeciálnych prípadov, ktoré máme vyriešiť. Kombináciou špeciálnych prípadov potom získame všeobecný prípad. Potrebujeme toľko nezávislých riešení špeciálnych prípadov, koľko je nezávislých parametrov (v tomto prípade sú tri α, β, γ).