9 Eulerovské a hamiltonovské grafy

9.1 Eulerovské grafy

Definition 9.1 *Graf $G = (V, E)$ je eulerovský, ak v ňom existuje uzavretý ťah obsahujúci všetky hrany a vrcholy grafu G.*

Veta 9.1 *Obyčajný graf $G = (V, E)$ je eulerovský práve vtedy, keď je súvislý a stupeň každého vrcholu v G je párne číslo.*

Dôkaz. $\Rightarrow$ Zrejmé.
$\Leftarrow$ Uvažujme v G ťah $T := [v_0, e_1, \ldots, e_m, v_m]$, ktorý má maximálnu dĺžku. Dokážeme, že:

(i) $v_0 = v_m$,

(ii) $\{e_i, i = 1, 2, \ldots, m\} = E$.

(i) Ak by $v_0 \neq v_m$, potom ťah môžme určite predĺžiť, lebo stupne vrcholov v_0 a v_m sú párne, ale v ťahu T nepárne.

(ii) Predpokladajme teda, že $v_0 = v_m$. Definujme pomocný graf $G' = (V', E')$, kde V' je množina všetkých vrcholov v ťahu T a E' množina jeho hrán.

Nech najskôr $V' \neq V$. Vďaka súvislosti grafu G existuje hrana tvaru $e = \{v_k, v'\} \in E$, kde $v_k \in V'$ a $v' \notin V'$. V tomto prípade ťah

$$[v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k, e, v']$$

má dĺžku $m + 1$ a vedie teda k sporu.

Ak $V' = V$ a $E' \neq E$, uvažujme hranu $e \in E \setminus E'$, kde $e = \{v_k, v_l\}$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade vedie ťah

$$[v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k, e, v_l]$$

k sporu. $\square$

Ak budeme v grafe G hľadať otvorený ťah obsahujúci všetky vrcholy a hrany (t.j. bez podmienky skončiť v tom istom vrchole, ako sme začali), potom nasledujúca veta podáva úplnu charakterizáciu:

Veta 9.2 *V obyčajnom grafe G existuje otvorený ťah obsahujúci všetky vrcholy a hrany práve vtedy, keď je súvislý a má práve dva vrcholy nepárneho stupňa.*

Dôkaz vety dáva aj návod na nejaký algoritmus na kreslenie grafov jedným ťahom. Neformálny popis: Začneme v ľubovoľnom vrchole v a obťahujeme v ľubovoľnom poradí „za sebou idúce hrany". Ak skončíme opäť vo vrchole v a neobtiahli sme ešte všetky hrany, neobtiahnuté hrany tvoria graf s komponentami so všetkými vrcholmi párneho stupňa. Vyberme ľubovoľnú komponentu, ktorá nech je prilepená k prvému uzavretému ťahu v nejakom vrchole $\tilde{v}$. Prvý ťah teda rozšírime vo vrchole $\tilde{v}$ o nejaký uzavretý ťah. Rekurzívnym opakovaním uvedenej myšlienky nakoniec nakreslíme celý graf jedným ťahom.

Iný **algoritmus na kreslenie grafu jedným ťahom**:
Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf (G rôzny od K_1) s 0 (prípad (i)) alebo 2 (prípad (ii)) vrcholmi nepárneho stupňa, ostatné vrcholy sú párneho stupňa.

Krok 1. V prípade (i) zvoľ $v_0 \in V$ ľubovoľne, v prípade (ii) nech v_0 je ľubovoľný vrchol nepárneho stupňa. Položme $T_0 = v_0$.

Krok 2. Opakuj nasledujúci krok 3 pre $i = 0, 1, 2, \ldots$, pokiaľ je to možné. Pokiaľ už krok 3 nie je možné previesť, T je hľadaný ťah.

Krok 3. (Predĺženie ťahu.) Nech $T_i = [v_0, e_1, v_1, \ldots, e_i, v_i]$ je už definovaný ťah. Zvoľ hranu $e_{i+1} \in E \setminus \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ obsahujúcu vrchol v_i. Pokiaľ je to možné, zvoľ e_{i+1} naviac tak, aby grafy $(V, E \setminus \{e_1, \ldots, e_i\})$ a $(V, E \setminus \{e_1, \ldots, e_i, e_{i+1}\})$ mali rovnaký počet komponent súvislosti.

Dôkaz správnosti algoritmu. Nech G je čo do počtu hrán najmenší protipríklad taký, že uvedený algoritmus vráti ťah, ktorý neprechádza všetkými hranami. Zrejme G je rôzne od K_2.

Označme $T = [v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k]$ výsledok uvedeného algoritmu aplikovaného na graf G.

Označme $G' = G \setminus \{e_1\}$. Ak $G \setminus \{e_1\}$ je nesúvislý graf, potom sa dá nahliadnuť, že $d_G(v_0) = 1$. Ináč by totiž buď e_1 bol mostom v grafe so všetkými vrcholmi párneho stupňa, alebo by nutne nastal spor s počtom vrcholom nepárneho stupňa. V takomto prípade položme $G' = G \setminus \{v_0\}$. G' je zrejme súvislý graf rôzny od K_1 a môžme naň aplikovať algoritmus na kreslenie jedným ťahom.

V G' sú buď všetky vrcholy párneho stupňa alebo G' obsahuje práve dva vrcholy nepárneho stupňa, z ktorých jeden je v_1.

Ak G' má všetky vrcholy párneho stupňa, potom podľa predpokladov existuje ťah T' v grafe G', ktorý začína a končí vo vrchole v_1 a prechádza všetkými hranami. Potom $[v_0, e_1] \cup T$ tvorí hľadaný ťah v G.

Ak G' má práve dva vrcholy nepárneho stupňa, potom jeden z nich je v_1 a podľa predpokladov existuje ťah T' v grafe G', ktorý začína vo vrchole v_1 a prechádza všetkými hranami. Potom $[v_0, e_1] \cup T$ tvorí hľadaný ťah v G.

V oboch prípadoch teda v grafe G existuje ťah prechádzajúci všetkými hranami, spor.

9.2 Hamiltonovské grafy

Definition 9.2 *Graf sa nazýva hamiltonovský, ak v ňom existuje kružnica prechádzajúca všetkými vrcholmi (hamiltonovská).*

Názov pochádza od írskeho matematika a fyzika Williama Rovana Hamiltona (1805-1865). Bol autorom hlavolamu úlohou ktorého bolo obísť po hranách vrcholy pravidelného dvanásťstena.

Na prvý pohľad sa hamiltonovské grafy zdajú byť obdobou eulerovských, nie je to však zďaleka pravda. Nie je známa nijaká nutná a postačujúca podmienka nato, aby bol graf hamiltonovský. Rozhodnúť, či graf je hamiltonovský je NP-úplny problém (to znamená, že nie je známe efektívnejšie riešenie ako prešetrenie všetkých možností). Je však známych mnoho postačujúcich podmienok na hamiltonovskosť.

Veta 9.3 (Dirac, 1952) *Nech G je graf, $|V| = n$, $n \geq 3$. Ak má každý vrchol stupeň aspoň $\frac{n}{2}$, tak graf je hamiltonský.*

Veta 9.4 (Ore, 1960) *Nech G je graf, $|V| = n$, $n \geq 3$. Ak pre každú dvojicu vrcholov, ktoré nie sú spojené hranou súčet ich stupňov je aspoň n, tak G je hamiltonovský.*

Dôkaz. Dôkaz od Lajosa Pósa, keď mal 15 rokov …

Ukážeme, že ak G nie je hamiltonovský, potom existuje dvojica vrcholov $u, v \in V(G)$ nespojených hranou a takých, že $d_G(u) + d_G(v) < n$.

Pridávajme ku grafu G hranu po hrane (ľubovoľne) kým nedostaneme hamiltonovský graf. (To sa nám určite raz podarí, lebo úplny graf je hamiltonovský.) Ak sme naposledy pridali hranu $\{u, v\}$, znovu ju odstránime. Dostaneme tak graf G', v ktorom síce nie je hamiltonovská kružnica, ale je v ňom (hamiltonovská) cesta, ktorá vychádza z vrcholu u, končí vo vrchole v a prechádza všetkými vrcholmi grafu G – každým práve raz. Ak je x ľubovoľný vrchol, ktorý je v grafe G' spojený hranou s vrcholom u, tak vrchol y, ktorý na spomenutej ceste bezprostredne predchádza vrcholu x, nemôže byť v grafe G' spojený hranou s vrcholom v. Potom by totiž v grafe G' bola hamiltonovská kružnica $u \to y \to v \to x \to u$. Ak je teda k stupeň vrcholu u, nemôže byť vrchol v v grafe G' spojený hranou prinajmenšom z k z $n - 1$ ostatných vrcholov, teda stupeň vrcholu v je najviac $n - k - 1$. Súčet stupňov vrcholov u, v v grafe G' je potom najviac $n - 1$. Pritom graf G' vznikol z grafu G pridávaním hrán, takže v grafe G nie je stupeň nijakého vrcholu väčší ako v grafe G'. $\square$