2 Súčty

Súčty sú v matematike všade, preto potrebujeme základné nástroje na manipuláciu s nimi. V tejto kapitole objasníme spôsoby zápisu a všeobecné metódy, ktoré nám spríjemnia narábanie so súčtami. Budeme sa zaoberať len konečnými súčtami.

2.1 Označenie a zápis

Stretli sme sa so súčtom prvých n celých čísel, ktorý sme zapísali $1+2+3+\ldots+(n-1)+n$. Symboly „$\ldots$" nám naznačujú, ako doplniť v súčte chýbajúce členy podľa okolitých členov. Samozrejme, musíme dávať pozor na súčty tvaru $1+7+\ldots+41.7$, ktoré bez okolitého kontextu nedávajú zmysel. Na druhej strane, uvádzanie členov 3 a $(n-1)$ je trochu zbytočné, nakoľko predpis pre členy by bol dostatočne zrozumiteľný, aj keby sme napísali len $1+2+\ldots+n$. Niekedy môžeme byť tak nedôsledný, že napíšeme len $1+\ldots+n$.

Budeme pracovať so súčtami všeobecného tvaru

$$a_1+a_2+\ldots+a_n, \tag{2.1}$$

kde každý člen a_k je nejako definované číslo. Tento zápis má tú výhodu, že vidíme celý súčet takmer, ako by sme ho mali celý vypísaný na papieri (samozrejme pri dostatku predstavivosti).

Každý výraz a_k v súčte nazývame *člen*. Členy súčtu sú obyčajne implicitne špecifikované výrazmi, čo umožňuje ľahšie pochopiť predpis na ich tvorbu. V takýchto prípadoch však musíme súčet zapísať v dostatočne rozšírenom tvare, aby význam členov bol dostatočne zrejmý. Napríklad

$$1+2+\ldots+2^{(n-1)}$$

zrejme označuje súčet n členov (a nie $2^{(n-1)}$ členov), čo môžeme priamočiarejšie zapísať

$$2^0+2^1+\ldots+2^{(n-1)}.$$

Zápis s troma bodkami má mnohoraké použitie, ale môže byť rozvláčny a dvojzmyselný. Naskýtajú sa ďalšie možnosti, najmä súčet s hranicami tvaru

$$\sum_{k=1}^{n} a_k, \tag{2.2}$$

ktorý sa nazýva *Sigma* zápis, lebo používa grécke písmeno $\sum$ (veľká sigma). Tento zápis nám hovorí, že súčet zahŕňa presne tie členy a_k, ktorých index k je celé číslo medzi dolnou a hornou hranicou súčtu 1 a n vrátane. Hovoríme, že „sčitujeme cez k od 1 po n". Prvýkrát použil $\sum$ zápis v roku 1820 Joseph Fourier a ten zakrátko zachvátil celý matematický svet. Mimochodom, veličina nasledujúca za $\sum$ (teraz a_k) sa nazýva ***sčítanec***. Hovoríme, že indexová premenná k je zviazaná so znakom $\sum$, lebo premenná k vo výrazoch a_k nesúvisí s premennou k mimo $\sum$ zápisu. Písmeno k v zápise súčtu môžeme nahradiť ľubovoľným iným písmenom bez zmeny významu výrazu. Často sa ako meno indexovej premennej používa písmeno i (snáď preto, že znamená „index"). My, vo všeobecnosti, budeme sčitovať podľa premennej k, nakoľko premenná i je vyhradená pre $\sqrt{-1}$.

Ukazuje sa, že všeobecné $\sum$ zápisy sú použiteľnejšie ako súčty s hranicami. Všeobecný $\sum$ zápis dostaneme tak, že napíšeme jednu alebo viac podmienok pod znak $\sum$ na vymedzenie množiny indexov, cez ktorú sčitujeme. Napríklad, súčet vo výrazoch (2.1) a (2.2) môžeme prepísať

$$\sum_{1\le k\le n} a_k. \tag{2.3}$$

V tomto konkrétnom príklade nie je veľa odlišností medzi novým tvarom súčtu a tvarom (2.2), ale všeobecný zápis nám umožňuje sčitovať cez množinu indexov, ktorá nemusí byť ohraničená na posebeidúce celé čísla. Napríklad, súčet štvorcov všetkých nepárnych kladných čísel menších ako 100 zapíšeme nasledovne:

$$\sum_{\substack{1\le k<100\\ k \text{ je nepárne}}} k^2,$$

čo je ekvivalentné zápisu

$$\sum_{k=0}^{49}(2k+1)^2,$$

ktorý je však ťažkopádnejší a menej jasný. Podobne súčet prevrátených hodnôt všetkých prvočísel medzi 1 a N je

$$\sum_{\substack{p\le N\\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p};$$

čo pomocou súčtu s hranicami zapíšeme

$$\sum_{k=1}^{\pi(N)} \frac{1}{p_k},$$

kde p_k označuje k-te prvočíslo a $\pi(N)$ je počet prvočísel $\le N$.

Najväčšou výhodou všeobecného $\sum$ zápisu je to, že sa s ním ľahšie manipuluje ako so súčtami s hranicami. Napríklad, predpokladajme, že chceme zmeniť indexovú premennú z k na $k+1$. Vo všeobecnom zápise túto zámenu zapíšeme

$$\sum_{1\le k\le n} a_k = \sum_{1\le k+1\le n} a_{k+1};$$

ľahko vidíme, čo sa stalo pri zámene premennej a substitúciu môžeme vykonať takmer bez rozmýšľania. Ale v tvare súčtu s hranicami dostávame

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1};$$

to už ťažšie vidieť, čo sa stalo a skôr spravíme chybu.

Znak $\sum$ budeme používať príliš často a tak by sme si mali byť istý, že vieme, čo znamená. Formálny zápis používame

$$\sum_{P(k)} a_k \tag{2.4}$$

ako skratku pre súčet všetkých členov a_k takých, že k je celé číslo majúce vlastnosť $P(k)$. („Vlastnosť" je ľubovoľné pravdivé či nepravdivé tvrdenie o k). Doteraz sme uvažovali, že existuje len konečne veľa celých čísel splňujúcich $P(k)$ takých, že $a_k \ne 0$; v opačnom prípade by sme sčitovali spolu nekonečne veľa nenulových čísel a situácia by bola trochu komplikovanejšia. Opačný krajný prípad je, ak vlastnosť $P(k)$ je nepravdivá pre všetky celé k. Vtedy dostávame „prázdny" súčet, ktorého hodnota je definovaná ako nula.

Často sa pokúšame písať

$$\sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)(n-k) \qquad \text{namiesto} \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)(n-k)$$

pretože členy pre $k=0,1$ a n sú v tomto súčte rovné nule. Môže sa zdať efektívnejšie sčitovať len $n-2$ členov namiesto $n+1$. Takéto snahy môžu byť na príťaž; lebo efektívnosť výpočtu nie je to isté, ako efektívnosť porozumenia! Je výhodné udržiavať hornú a dolnú hranicu v najjednoduchšom tvare, pretože narábanie so súčtami je tým jednoduchšie, čím jednoduchšie sú hranice. Navyše výraz $\sum_{k=2}^{n-1}$ je nebezpečný a zrádny, pretože nie je jasný jeho význam pre $n=0$ alebo $n=1$. Nulové členy nespôsobujú žiadne škodu, a často nás chránia pred mnohými problémami.

Niektoré súčty majú svoj názov, ktorý sa používa ako „stavebný kameň" pri práci so súčtami. Súčet

$$H_n = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

sa nazýva harmonické číslo H_n. H_x je diskrétna analógia spojitej funkcie $\ln x$. (Nie je bez zaujímavostí, že pre celočíselné hodnoty x, hodnota $H_x - \ln x$ je približne $0.577 + 1/(2x)$ pre veľké x. Preto H_x a $\ln x$ nie sú len analogické funkcie, ale ich hodnoty sa vždy odlišujú menej ako 1.)

2.2 Práca so súčtami

Kľúčom k úspechu pri práci so súčtami je schopnosť zmeniť jednu $\sum$ na inú, ktorá je bližšie k nejakému cieľu. Ak si osvojíme niekoľko základných transformačných pravidiel a precvičíme ich použitie, pôjde nám to ľahko.

Nech K je nejaká konečná množina celých čísel. Súčty členov cez množinu indexov K môžeme transformovať použitím niekoľkých jednoduchých pravidiel:

- *distributívny zákon*
$$\sum_{k\in K} ca_k = c\sum_{k\in K} a_k;$$
- *asociatívny zákon*
$$\sum_{k\in K}(a_k+b_k) = \sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K} b_k;$$
- *komutatívny zákon*
$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{p(k)\in K} a_{p(k)}.$$
- *kombinácia rôznych množín indexov:* ak K a K' sú ľubovoľné konečné množiny celých čísel, potom
$$\sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K'} a_k = \sum_{k\in K\cap K'} a_k + \sum_{k\in K\cup K'} a_k. \tag{2.5}$$

Nasledujúce vzťahy vyplývajú zo všeobecnej formule
$$(k\in K)+(k\in K') = (k\in K\cap K') + (k\in K\cup K'). \tag{2.6}$$

Distributívny zákon nám dovoľuje vsunúť a vyňať konštantu zo $\sum$. Asociatívny zákon dovoľuje rozdeliť súčet na dve časti a spájať viacero súčtov do jedného. Komutatívny zákon hovorí, že môžeme preusporiadať členy v ľubovoľnom poradí, kde $p(k)$ je ľubovoľná permutácia (Prečo sa teda tento zákon nevolá permutatívny zákon, ale komutatívny?)

2.3 Viacnásobné súčty

Členy v súčte môžu byť určené dvomi alebo viacerými indexami, nie len jedným. Napríklad, výraz
$$\begin{aligned}\sum_{1\le j,k\le 3} a_jb_k = a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3\\ + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3\\ + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3.\end{aligned}$$
predstavuje dvojitý súčet deviatich členov určených dvomi indexami j a k. Pre takéto súčty použijeme rovnaký zápis a metódy, ako sme používali pre jednoduché indexy.

Môžme tiež použiť dva znaky $\sum$, a vtedy hovoríme o súčte súčtov. Napríklad, zápis
$$\sum_{1\le j,k\le 3} a_{j,k} = \sum_{1\le j\le 3}\sum_{1\le k\le 3} a_{j,k}.$$
Viacnásobné $\sum$y sa vyhodnocujú zprava doľava (zvnútra von). Viacnásobný súčet viacerých indexov môžeme sčitovať v ľubovoľnom poradí indexov.

Vďaka tomu dostávame základný zákon pre viacnásobné súčty, nazývaný tiež *zákon zámeny poradia sčitovania*, ktorý zovšeobecňuje asociatívny zákon a existujú dve možnosti, ako presne formalizovať tento zákon: prvý spôsob má príchuť vanilky a druhý tŕnistej cesty. Najprv, vanilková varianta:
$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} a_{j,k} = \sum_{\substack{j\in J\\ k\in K}} a_{j,k} = \sum_{k\in K}\sum_{j\in J} a_{j,k}. \tag{2.7}$$

Táto vanilková varianta zákona sa používa, keď obory hodnôt pre indexy sú navzájom nezávislé.

Vzťah pre variantu tŕnistej cesty je trochu záľudnejší. Používa sa vtedy, keď obor hodnôt pre vnútorný index závisí na hodnote indexovej premennej vonkajšieho súčtu:
$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K(j)} a_{j,k} = \sum_{k\in K'}\sum_{j\in J'(k)} a_{j,k}. \tag{2.8}$$
J, $K(j)$, K' a $J'(k)$ sú množiny spĺňajúce vzťah
$$(j\in J)(k\in K(j)) = (k\in K')(j\in J'(k)).$$

Ako príklad uvedieme zvlášť užitočnú faktorizáciu:
$$(1\le j\le n)(j\le k\le n) \;\Leftrightarrow\; (1\le j\le k\le n) \;\Leftrightarrow\; (1\le k\le n)(1\le j\le k). \tag{2.9}$$
Zvyčajne jeden z týchto súčtov je ľahšie vypočítateľný ako druhý. Vzťah (2.9) môžeme použiť aj na transformáciu ťažšieho tvaru na ľahší. Poradie indexov si zvolíme podľa toho, ktoré je výhodnejšie.

Súčet súčtov nie je dôvod pre paniku, ale u začiatočníkov môže vyvolať zmätok. Urobíme preto viaceré príklady. Náš príklad s deväťčlenným súčetom poskytuje dobrú ilustráciu pre manipuláciu s dvojitými súčtami, pretože takýto súčet môže byť naozaj zjednodušený a proces zjednodušovania je typický pre prácu s viacnásobnými súčtami:
$$\begin{aligned}\sum_{1\le j,k\le 3} a_jb_k &= \sum_{1\le j\le 3}\sum_{1\le k\le 3} a_jb_k\\ &= \sum_{1\le j\le 3} a_j\Big(\sum_{1\le k\le 3} b_k\Big)\\ &= \Big(\sum_{1\le k\le 3} b_k\Big)\Big(\sum_{1\le j\le 3} a_j\Big).\end{aligned}$$
Prvý riadok označuje súčet deviatich členov bez určeného poradia. Druhý riadok ich zoskupuje do trojíc. Tretí riadok využíva distributívny zákon na vyňatie všetkých členov a, nakoľko a_j nezávisí na k; tým dostávame $a_1(b_1+b_2+b_3)+a_2(b_1+b_2+b_3)+a_3(b_1+b_2+b_3)$. Štvrtý riadok je rovnaký ako tretí, len obsahuje zbytočný pár zátvoriek, takže piaty riadok nevyzerá až tak strašne. V piatom riadku sme vyňali člen $(b_1+b_2+b_3)$, ktorý sa vyskytuje v každom člene pre každé j: $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)$. Posledný riadok je inak zapísaný predposledný riadok. Túto metódu odvodenia môžeme použiť pri odvodení *všeobecného distributívneho zákona*,
$$\sum_{\substack{j\in J\\ k\in K}} a_jb_k = \Big(\sum_{j\in J} a_j\Big)\Big(\sum_{k\in K} b_k\Big), \tag{2.10}$$
ktorý platí pre ľubovoľné množiny indexov J a K.

Príklad. Aplikujme tieto myšlienky na užitočnom príklade. Uvažujme maticu
$$\begin{pmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & a_1a_3 & \dots & a_1a_n\\ a_2a_1 & a_2a_2 & a_2a_3 & \dots & a_2a_n\\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3a_3 & \dots & a_3a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \dots & a_na_n\end{pmatrix}$$
obsahujúcu n^2 súčinov a_ja_k. Našim cieľom je nájsť jednoduchý vzťah pre súčet všetkých členov nad, alebo pod hlavnou uhlopriečkou v tejto matici:
$$S_{HT} = \sum_{1\le j\le k\le n} a_ja_k,$$

Nakoľko $a_j a_k = a_k a_j$ matica je symetrická podľa hlavnej uhlopriečky, preto aj súčet S_{HT} je približne rovný polovici zo súčtu všetkých prvkov (okrem prvkov hlavnej uhlopriečky).

Podobné úvahy motivujú nasledujúce úpravy, v ktorých sme premenili (j,k) na (k,j).

$$S_{HT} = \sum_{1\le j\le k\le n} a_j a_k = \sum_{1\le k\le j\le n} a_k a_j = \sum_{1\le k\le j\le n} a_j a_k = S_{DT},$$

Pretože platí

$$(1\le j\le k\le n) + (1\le k\le j\le n) = (1\le j,k\le n) + (1\le j=k\le n),$$

dostávame

$$2S_{HT} = S_{HT} + S_{DT} = \sum_{1\le j,k\le n} a_j a_k + \sum_{1\le j=k\le n} a_j a_k.$$

Prvý súčet je po úprave pomocou všeobecného distributívneho zákona (2.10) rovný $(\sum_{j=1}^n a_j)(\sum_{k=1}^n a_k) = (\sum_{k=1}^n a_k)^2$. Druhý súčet je rovný $\sum_{k=1}^n a_k^2$. Takže dostávame výraz pre súčet členov matice, ktoré sa nachádzajú v hornom trojuholníku:

$$S_{HT} = \sum_{1\le j\le k\le n} a_j a_k = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2\right). \tag{2.11}$$

□

Príklad. Posmelený úspechom si všimnime iný dvojitý súčet:

$$S = \sum_{1\le j<k\le n} (a_k - a_j)(b_k - b_j).$$

Zámenou k za j opäť dostaneme symetrický vzťah:

$$S = \sum_{1\le k<j\le n} (a_j - a_k)(b_j - b_k) = \sum_{1\le k<j\le n} (a_k - a_j)(b_k - b_j).$$

Takže môžeme obe rovnosti pre S sčítať a použijúc vzťah

$$(1\le j<k\le n) + (1\le k<j\le n) = (1\le j,k\le n) - (1\le j=k\le n),$$

dostaneme

$$2S = \sum_{1\le j,k\le n} (a_j - a_k)(b_j - b_k) - \sum_{1\le k=j\le n} (a_j - a_k)(b_j - b_k).$$

Druhý súčet je rovný nule; a čo prvý? Ten sa rozpadne na štyri oddelené súčty, každý s vanilkovou príchuťou:

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le j,k\le n} a_j b_j - \sum_{1\le j,k\le n} a_j b_k - \sum_{1\le j,k\le n} a_k b_j + \sum_{1\le j,k\le n} a_k b_k \\
&= 2\sum_{1\le j,k\le n} a_k b_k - 2\sum_{1\le j,k\le n} a_j b_k \\
&= 2n\sum_{1\le k\le n} a_k b_k - 2\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k\right).
\end{aligned}$$

V poslednom kroku kroku sme oba súčty zjednodušili podľa všeobecného distributívneho zákona (2.10). Ak sa úpravy prvého súčtu zdajú hrôzostrašné, zopakujeme ich pomaly:

$$\begin{aligned}
2\sum_{1\le j,k\le n} a_k b_k &= 2\sum_{1\le k\le n}\sum_{1\le j\le n} a_k b_k \\
&= 2\sum_{1\le k\le n} a_k b_k \sum_{1\le j\le n} 1 \\
&= 2\sum_{1\le k\le n} a_k b_k n = 2n\sum_{1\le k\le n} a_k b_k.
\end{aligned}$$

Indexová premenná, ktorá sa nevyskytuje v sčítancoch môže byť jednoducho vypustená, ak vynásobíme zvyšok veľkosťou množiny obory daného indexu (v našom prípade n).

Vrátime sa tak, kde sme naše úvahy prerušili; náš vzťah môžeme vydeliť dvomi a preusporiadť tak, že dostaneme zaujímavý vzťah

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k\right) = n\sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{1\le j<k\le n} (a_k - a_j)(b_k - b_j). \tag{2.12}$$

Z tejto identity ako špeciálny prípad vyplýva *Čebyševova nerovnosť pre súčty*:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k\right) &\le n\sum_{k=1}^n a_k b_k, &&\text{ak } a_1\le\cdots\le a_n \text{ a } b_1\le\cdots\le b_n;\\
\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k\right) &\ge n\sum_{k=1}^n a_k b_k, &&\text{ak } a_1\le\cdots\le a_n \text{ a } b_1\ge\cdots\ge b_n.
\end{aligned}$$

□

2.4 Všeobecné metody na počítanie súm

2.4.1 Perturbačná metóda

Podobne použijeme pravidlo (2.6) na kombináciu dvoch takmer disjunktných indexových množín

$$\sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m}^n a_k = a_m + \sum_{k=1}^n a_k, \qquad \text{pre } 1\le m\le n;$$

alebo na vyňatie jedného člena zo súčtu

$$\sum_{0\le k\le n} a_k = a_0 + \sum_{1\le k\le n} a_k, \qquad \text{pre } n\ge 0. \tag{2.13}$$

Táto operácia vyňatia jedného člena je základom *perturbačnej metódy*, ktorá nám často pomôže pri výpočte hodnoty súčtu v explicitnom tvare. Myšlienka spočíva v tom, že najprv si neznámy súčet označíme S_n:

$$S_n = \sum_{0\le k\le n} a_k.$$

(pomenuj a zvíťaz), a potom dvomi spôsobmi prepíšeme S_{n+1}; vyňatím najprv prvého, a potom posledného člena:

$$\begin{aligned}
S_n + a_{n+1} &= \sum_{0\le k\le n+1} a_k = a_0 + \sum_{1\le k\le n+1} a_k \\
&= a_0 + \sum_{1\le k+1\le n+1} a_{k+1} \\
&= a_0 + \sum_{0\le k\le n} a_{k+1}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Teraz sa pokúsme posledný súčet vyjadriť pomocou S_n. Ak sa nám to podarí, získame rovnicu, ktorej riešením je hľadaný súčet.

Ako príklad, použijeme túto metódu na nájdenie súčtu všeobecnej geometrickej postupnosti,

$$S_n = \sum_{0\le k\le n} ax^k.$$

Všeobecná perturbačná schéma vo vzťahu (2.14) nám radí

$$S_n + ax^{n+1} = ax^0 + \sum_{0\le k\le n} ax^{k+1},$$

a súčet na pravej strane je podľa distributívneho zákona rovný $\sum_{0\le k\le n} ax^k = xS_n$. Preto $S_n + ax^{n+1} = a + xS_n$ a hľadané riešenie pre S_n má tvar

$$\sum_{k=0}^{n} ax^k = \frac{a - ax^{n+1}}{1-x}, \qquad \text{pre } x \neq 1. \tag{2.15}$$

(Aháää, túto formulu sme drilovali na strednej škole!!!) (Keď $x = 1$, súčet sa samozrejme zjednoduší na $a(n+1)$). Pravá strana pripomína výraz, ktorý vznikne tým, že od prvého člena odčítame posledný člen (resp. člen nasledujúci za posledným) a vydelíme výrazom 1 mínus kvocient.

2.4.2 Prevod sumy na rekurenciu (možno i obecnejšiu)

Ďalší spôsob je, všimnúť si, že existuje blízky vzťah medzi súčtami a rekurentnými vzťahmi. Súčet

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

je ekvivalentný rekurzívnemu vzťahu

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0; \\ S_n &= S_{n-1} + a_n, \qquad \text{pre} > 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Preto súčet môžeme vypočítať niekedy použitím metódy, ktorú sme sa naučili na riešenie rekurentných vzťahov.

Pokúsme sa nájsť explicitné vyjadrenie pre súčet štvorcov prvých n celých čísel, ktorý označíme $\Box_n$:

$$\Box_n = \sum_{0\le k\le n} k^2, \qquad \text{pre } n \ge 0 \tag{2.17}$$

Predchádzajúci vzťah zovšeobecníme na rekurentnú rovnicu

$$\begin{aligned} R_0 &= \alpha, \\ R_n &= R_{n-1} + \beta + \gamma n + \delta n^2, \qquad \text{pre } n > 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

s riešením všeobecného tvaru

$$R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma + D(n)\delta; \tag{2.19}$$

, ktoré vieme nájsť metódu neurčitých koeficientov. Metóda „neurčitých koeficientov“ nám radí skúsiť dosadiť jednoduché funkcie do R_n dúfajúc, že nájdeme konštantné parametre α, β a γ, pre ktoré je riešenie zvlášť jednoduché. Položením $R_n = 1$ dostávame, že $\alpha = 1$, $\beta = 0$ a $\gamma = 0$. Z toho vyplýva

$$A(n) = 1.$$

Položením $R_n = n$ dostávame, že $\alpha = 0$, $\beta = 1$ a $\gamma = 0$. Z toho vyplýva

$$B(n) = n.$$

Položením $R_n = n^2$ dostávame, že $\alpha = 0$, $\beta = -1$ a $\gamma = 2$. Z toho vyplýva

$$2C(n) - B(n) = n^2$$

a dostávame $C(n) = (n^2+n)/2$. Ak teraz položíme $R_n = n^3$, zistíme, že n^3 je riešením pre $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = -3$, $\delta = 3$. Preto vzťah

$$3D(n) - 3C(n) + B(n) = n^3;$$

určuje $D(n)$.

Zaujímali sme sa o súčet $\Box_n$, ktorý sa rovná $\Box_{n-1} + n^2$, preto sme dostali $\Box_n = R_n$, keď sme položili $\alpha = \beta = \gamma = 0$ a $\delta = 1$ vo vzťahu (2.19). Odtiaľ $\Box_n = D(n)$. Nepotrebujeme algebraické úpravy na výpočet $D(n)$ z $B(n)$ a $C(n)$, pretože už vieme, aký bude výsledok. Ale pochybovači medzi nami by sa mali uistiť úpravou

$$3D(n) = n^3 + 3C(n) - B(n) = n^3 + 3\frac{(n+1)n}{2} - n = n\left(n + \frac{1}{2}\right)(n+1).$$

2.4.3 Zámena súčtu integrálom

Ľudia, ktorým je miesto diskrétnej matematiky bližšia matematická analýza, sú bližšie $\int$ miesto $\sum$, takže prirodzene hľadajú možnosť ako nahradiť $\sum$ za $\int$. Ukážeme si, že to nie je až taký zlý nápad. Ale zatiaľ, dobrá myšlienka je vysvetliť vzťah medzi $\sum$ a $\int$, nakoľko sčitovanie a integrovanie sú založené na veľmi podobných myšlienkach.

V matematickej analýze integrál znázorňujeme ako plochu pod krivkou. Túto plochu môžeme aproximovať pokrytím dlhými a tenkými obdĺžnikmi, ktoré sa dotýkajú krivky. Predpokladajme, že sčítance tvoria monotónnu rastúcu, či klesajúcu postupnosť. Napríklad uvažujme opäť sumu $\Box_n$.

Nakoľko $\Box_n$ je súčet plôch obdĺžnikov, ktorých rozmery sú 1×1, 1×4, …, $1\times n^2$, je približne rovný ploche pod krivkou $f(x) = x^2$ medzi 0 a n.

Plocha pod krivkou je $\int_0^n x^2\,dx = n^3/3$, preto vieme, že $\Box_n$ je približne rovné $\frac{1}{3}n^3$.

Jeden spôsob, ako použiť tento vzťah je určiť chybu $E_n = \Box_n - \frac{1}{3}n^3$ v aproximácii súčtu integrálom. Nakoľko $\Box_n$ spĺňuje rekurentný vzťah $\Box_n = \Box_{n-1} + n^2$, zistíme, že E_n spĺňuje jednoduchší rekurentný vzťah

$$\begin{aligned} E_n = \Box_n - \frac{1}{3}n^3 = \Box_{n-1} + n^2 - \frac{1}{3}n^3 &= E_{n-1} + \frac{1}{3}(n-1)^3 + n^2 - \frac{1}{3}n^3 \\ &= E_{n-1} + n - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Iný spôsob sledovania integrálneho prístupu je nájsť formulu E_n sčitovaním plôch.

$$\Box_n - \int_0^n x^2\,dx = \sum_{k=1}^{n}\Big(k^2 - \int_{k-1}^{k} x^2\,dx\Big)$$

(Toto je pre ľudí, ktorí sú zasvätení do matematickej analýzy!!!)

$$= \sum_{k=1}^{n}\Big(k^2 - \frac{k^3-(k-1)^3}{3}\Big) = \sum_{k=1}^{n}\Big(k - \frac{1}{3}\Big).$$

Už vieme vyjadriť E_n a potom aj $\Box_n$.

2.4.4 Rozvíjaj, upravuj a uvidíš

Iný spôsob určenia explicitného výrazu pre $\Box_n$ je nahradenie pôvodného súčtu zdanlivo komplikovanejším dvojitým súčtom, ktorá v skutočnosti môže byť zjednodušená

$$\begin{aligned} \Box_n &= \sum_{1\le k\le n} k^2 = \sum_{1\le j\le k\le n} k \\ &= \sum_{1\le j\le n}\ \sum_{j\le k\le n} k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{1\le j\le n}\big(n(n+1) + j - j^2)\big) \end{aligned}$$

Posledný krok je podobný perturbačnej metóde, pretože dostávame rovnicu s neznámou veličinou na oboch stranách.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}n^2(n+1) + \frac{1}{4}n(n+1) - \frac{1}{2}\Box_n \\ &= \frac{1}{2}n\left(n + \frac{1}{2}\right)(n+1) - \frac{1}{2}\Box_n. \end{aligned}$$

Prechod od jednoduchého súčtu k viacnásobnému sa môže zdať na začiatku ako krok späť, ale v skutočnosti je to pokrok pretože dostávame súčty, s ktorými sa ľahšie pracuje. Nemôžeme očakávať, že pri riešení každého problému budeme neustále zjednodušovať a zjednodušovať: nedosiahneme najvyšší vrchol len lezením hore!

Inou metódou je využiť niektoré jednoduché vzťahy pri úpravách, napr. teleskopické súčty (podľa analógie so zloženým teleskopom, pretože hrúbka zloženého teleskopu je určená len vonkajším polomerom najvonkajšieho tubusu a vnútorného polomeru najvnútornejšieho tubusu).. Nech $a_0, a_1, \ldots, a_n$ je ľubovoľná postupnosť celých čísel. Potom:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0, \quad \text{alebo} \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_n,$$

aplikované v príklade

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Iný použiteľný vzťah je napríklad:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = na_n - \sum_{k=1}^{n-1} k(a_{k+1} - a_k).$$

2.5 Konečný a nekonečný kalkulus

Naučili sme sa narábať so súčtami mnohými spôsobmi. Teraz je načase získať širší pohľad pozerajúc sa na problém sumácie z vyššej úrovne. Matematici objavili „konečný kalkulus“ ako analógiu nekonečnému kalkulu, pomocou ktorého je možné pristupovať k sčitovaniu systematicky.

Nekonečný kalkulus sa zakladá na pojme operátora *derivácie* D, ktorý je definovaný

$$Df(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Konečný kalkulus sa zakladá na pojme operátora *diferencie* Δ, ktorý je definovaný

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x). \tag{2.20}$$

Toto je konečná varianta derivácie, v ktorej sme sa ohraničili na kladné celočíselné hodnoty h. Preto, $h = 1$ je najbližšie kladné celé číslo k 0 v zmysle „limity“ keď $h \to 0$ a $\Delta f(x)$ je hodnotou výrazu $\Delta f(x) = \big(f(x+h) - f(x)\big)/h$ pre $h = 1$.

Symboly D a Δ sa nazývajú operátory, pretože zobrazujú funkcie do funkcií. Sú to vlastne funkcie funkcií, ktorých výsledky sú funkcie. Ak f je dostatočne hladká funkcia z reálnych čísel do reálnych čísel, potom Df je tiež funkcia z reálnych čísel do reálnych čísel. Ak f je ľubovoľná reálna funkcia, tak tiež $\Delta f(x)$. Hodnoty funkcií Df a Δf v bode x sú definované vyššie.

Kedysi sme sa v analýze učili, ako operátor D pracuje na mocninných funkciách $f(x) = x^m$. V takýchto prípadoch $Df(x) = mx^{m-1}$. Toto môžeme neformálne zapísať tým, že f vynecháme

$$D(x^m) = mx^{m-1}.$$

Bolo by pekné, keby operátor Δ dával rovnako pekné výsledky. Pravdaže, čo čert nechcel, tomu tak nie je. Pozrime sa na príklad

$$\Delta(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$$

Ale existuje typ „m-tej mocniny“, ktorá sa operátorom Δ transformuje krajšie a to je to, čo robí konečný kalkulus zaujímavým. Táto nová m-tá mocnina je definovaná nasledujúcim pravidlom

$$x^{\underline{m}} = \overbrace{x(x-1)\ldots(x-m+1)}^{m}, \qquad \text{pre } m \geq 0. \tag{2.21}$$

Všimnime si, že malý podčiarovník pod m, ktorý znamená, že násobíme m členov, ktoré sa postupne zmenšujú. Existuje tiež zodpovedajúce označenie pre súčin členov, ktoré rastú:

$$x^{\overline{m}} = \overbrace{x(x+1)\ldots(x+m-1)}^{m}, \qquad \text{pre } m \geq 0. \tag{2.22}$$

Ak $m = 0$, definujeme $x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1$, pretože prázdny súčin sa obyčajne definuje 1 (práve ako prázdny súčet sa definuje 0).

Veličina $x^{\underline{m}}$ sa nazýva „x na klesajúce m“ a podobne $x^{\overline{m}}$ čítame „x na rastúce m“. Tieto funkcie sa nazývajú *klesajúca* a *rastúca faktorialová mocnina*, pretože majú blízky vzťah k funkcii faktoriál $n! = n(n-1)\ldots 1$. V skutočnosti $n! = n^{\underline{n}} = 1^{\overline{n}}$.

V matematickej literatúre sa objavujú niektoré iné označenia pre faktoriálové mocniny, napríklad „Pochhammerov symbol“ $(x)_m$ pre $x^{\overline{m}}$, alebo $x^{\underline{m}}$; resp. označenie $x^{(m)}$ a $x_{(m)}$ pre $x^{\underline{m}}$. Ale označenie s podčiarovníkom a nadčiarovníkom je výstižné, lebo sa ľahko zapisuje, pamätá a neobsahuje zbytočné zátvorky.

Klesajúce mocnina $x^{\underline{m}}$ je zvlášť pekná z pohľadu Δ. Platí, že

$$\begin{aligned}\Delta(x^{\underline{m}}) &= ((x+1)^{\underline{m}}) - x^{\underline{m}}\\ &= (x+1)x\ldots(x-m+2) - x\ldots(x-m+2)(x-m+1)\\ &= mx(x-1)\ldots(x-m+2),\end{aligned}$$

a preto konečný kalkulus má šikovný zákon podobný zákonu $D(x^m) = mx^{m-1}$:

$$\Delta(x^{\underline{m}}) = mx^{\underline{m-1}}. \tag{2.23}$$

Toto je základný poznatok.

Operátor D v nekonečnom kalkule má inverzný oprátor, „anti-derivačný“ (resp. integračný operátor $\int$). Základná teoréma matematickej analýzy dáva do vzťahu D a $\int$:

$$g(x) = Df(x) \qquad \text{práve vtedy, keď} \qquad \int g(x)\,dx = f(x) + C.$$

V tomto vzťahu $\int g(x)\,dx$ označuje neurčitý integrál funkcie $g(x)$, čo je trieda funkcií, ktorých derivácia je $g(x)$. Analogicky aj Δ má inverzný operátor, „anti-diferenčný“ (alebo sumačný) operátor $\sum$. Platí tu ďalšia základná teoréma:

$$g(x) = \Delta f(x) \qquad \text{práve vtedy, keď} \qquad \sum g(x)\delta x = f(x) + C(x). \tag{2.24}$$

Tu výraz $\sum g(x)\delta x$ nazývame *neurčitým súčtom* a označuje triedu funkcií, ktorých *diferencia* je $g(x)$. (Poznamenajme, že malé δ zodpovedá veľkému Δ tak, ako d zodpovedá D). Konštanta C pre neurčité integrály označuje ľubovoľnú konštantu; výraz C pre neurčité súčty je ľubovoľná funkcia $p(x)$, pre ktorú platí, že $p(x+1) = p(x)$. Napríklad, C môže byť periodická funkcia $a + b\sin 2\pi x$; takéto funkcie predstavujú „konštanty“ pri diferencovaní, práve tak ako konštanty pri derivovaní. V celočíselných hodnotách je funkcia C konštantou.

Teraz sme dostatočne pripravený na úder. Nekonečný kalkulus má tiež *určité* integrály: ak $g(x) = Df(x)$, potom

$$\int_a^b g(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

Preto konečný kalkulus má určité *sumy.* Ak $g(x) = \Delta f(x)$, potom

$$\sum\nolimits_a^b g(x)\,\delta x = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a). \tag{2.25}$$

Táto formula dáva zmysel zápisu $\sum_a^b g(x)\delta x$ práve tak, ako predchádzajúca dáva význam zápisu $\int_a^b g(x)\,dx$

Ale, čo v skutočnosti znamená $\sum_a^b g(x)\delta x$? Tento zápis sme definovali na základe analógie a nie nevyhnutnosti a potreby. Chceme, aby sa analógia zachovala aj v budúcnosti. Preto si ľahko môžeme spomenúť na pravidlá konečného kalkulu. Ale zápis bude nepoužiteľný, ak by sme nerozumeli jeho významu. Pokúsme sa vydedukovať jeho význam sledovaním niektorých špeciálnych prípadov. Nech $g(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

Ak $b = a$, platí

$$\sum\nolimits_a^a g(x)\,\delta x = f(a) - f(a) = 0.$$

Ďalej, ak $b = a+1$, výsledok je

$$\sum\nolimits_a^{a+1} g(x)\,\delta x = f(a+1) - f(a) = g(a).$$

Overili sme bázu pre matematickú indukciu, ktorou chceme dokázať, že

$$\sum\nolimits_a^b g(x)\,\delta x = \sum_{a\le k<b} g(k).$$

Stačí si uvedomiť, že

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_a^{b+1} g(x)\,\delta x &= \big(f(b+1) - f(a)\big)\\ &= \big(f(b+1) - f(b)\big) - \big(f(b) - f(a)\big)\\ &= g(b) + \sum_{a\le k<b} g(k)\end{aligned}$$

Tieto výskumy nám dovoľujú dedukovať presný význam zápisu $\sum_a^b g(x)\delta x$ vo všeobecnosti, keď a a b sú celé čísla také, že $b \ge a$:

$$\sum\nolimits_a^b g(x)\delta x = \sum_{k=a}^{b-1} g(k) = \sum_{a\le k<b} g(k), \qquad \text{pre celé čísla } b \ge a. \tag{2.26}$$

Inými slovami, určité súčty sú rovnaké ako obyčajné súčty s ohraničeniami okrem hodnoty sumačného člena v hornej hranici.

Pokúsme sa rekapitulovať trochu iným spôsobom. Predpokladajme, že máme nájsť explicitný výraz pre neznámy súčet, a predpokladajme, že ju môžeme zapísať v tvare $\sum_{a\le k<b} g(k) = \sum_a^b g(x)\delta x$. Teória konečného kalkulu nám hovorí, že riešenie môžeme vyjadriť ako $f(b) - f(a)$, ak vieme nájsť funkciu f, ktorá je neurčitým súčtom, resp. anti-diferenciou funkcie g.

Ale pravidlo (2.26) možno použiť, len ak $b \ge a$; ale čo ak $b < a$? Podľa vzťahu (2.25)

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_a^b g(x)\delta x &= f(b) - f(a)\\ &= -\big(f(a) - f(b)\big) = -\sum\nolimits_b^a g(x)\delta x.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Toto je analógia korešpondujúca rovniciam pre konečný integrál. Podobný argument dokazuje $\sum_a^b + \sum_b^c = \sum_a^c$, pre všetky celé čísla a,b a c, čo je sumačná analógia sčitovania integrálov.

Teraz sa niektorí z nás začínajú obávať, čo nám všetky tieto paralely a analógie dali. Dobre, určité súčty nám poskytujú jednoduchú cestu na výpočet klesajúcich mocnín: zo základných zákonov (2.23), (2.25) a (2.26) odvodíme všeobecný zákon

$$\sum_{0\le k<n} k^{\underline{m}} = \frac{k^{\underline{m+1}}}{m+1}\Big|_0^n = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}, \qquad \text{pre celé } m,n \ge 0. \tag{2.28}$$

Táto formula je ľahko zapamätateľná, pretože je veľmi podobná formuli

$$\int_0^n x^m\,dx = \frac{n^{m+1}}{(m+1)}.$$

Špeciálne, keď $m = 1$, dostávame $k^{\underline{1}} = k$. Princípy konečného kalkulu nám dávajú jednoduchú možnosť na zapamätanie faktu, že

$$\sum_{0\le k<n} k = \frac{n^{\underline{2}}}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Nový spôsob, ako môžeme sčitovať obyčajné mocniny, sa zakladá na tom, že najprv vyjadríme mocninu pomocou klesajúcich mocnín. Napríklad

$$k^2 = k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}},$$

odkiaľ

$$\sum_{0\le k<n} k^2 = \frac{n^{\underline{3}}}{3} + \frac{n^{\underline{2}}}{2} = \frac{1}{3}n(n-1)\left(n-2+\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3}n\left(n-\frac{1}{2}\right)(n-1).$$

Nahradením n výrazom $n+1$ nám dá ešte jeden spôsob ako vypočítať hodnotu našeho starého známeho priateľa $\square_n = \sum_{0\le k\le n} k^2$ v explicitnom tvare.

Jeej, to bolo nádherne ľahké. Jednoduché výpočty nám ukážu, že

$$k^3 = k^{\underline{3}} + 3k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}.$$

Preto

$$\sum_{a\le k<b} k^3 = \frac{k^{\underline{4}}}{4} + k^{\underline{3}} + \frac{k^{\underline{2}}}{2}\Big|_a^b.$$

Klesajúce mocniny sú veľmi pekné pre súčty. Ale majú nejaké iné oslobodzujúce rysy? Musíme konvertovať naše staré priateľské klasické mocniny na klesajúce mocniny pred sčitovaním, ale musíme ich konvertovať späť skôr než chceme urobiť hocičo iné? Často je možné pracovať priamo s faktoriálovými mocninami, pretože oni majú dodatočné vlastnosti. Napríklad, práve ako $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ z toho vyplýva $(x+y)^{\underline{2}} = x^{\underline{2}} + 2x^{\underline{1}}y^{\underline{1}} + y^{\underline{2}}$ a podobná analógia platí medzi $(x+y)^m$ a $(x+y)^{\underline{m}}$.

Doposiaľ sme uvažovali len mocniny s klesajúcim exponentom, ktoré majú nezáporné exponenty. Na rozšírenie analógii s klasickými mocninami na záporné exponenty, potrebujeme mať vhodnú definíciu $x^{\underline{m}}$ pre $m \le 0$. Všimnime si postupnosť

$$\begin{aligned}x^{\underline{3}} &= x(x-1)(x-2),\\ x^{\underline{2}} &= x(x-1),\\ x^{\underline{1}} &= x,\\ x^{\underline{0}} &= 1,\end{aligned}$$

a vidíme, že aby sme z výrazu $x^{\underline{3}}$ dostali výraz $x^{\underline{2}}$ a z neho výraz $x^{\underline{1}}$ a z neho $x^{\underline{0}}$ delíme výrazy postupne výrazmi $x-2$, $x-1$ a x. Zdá sa rozumné (ak nie nutné), aby sme v nasledujúcom kroku delili výrazom $x+1$ na transformáciu od výrazu $x^{\underline{0}}$ k výrazu $x^{\underline{-1}}$, a preto $x^{\underline{-1}} = \frac{1}{(x+1)}$. Prvých pár mocnín s klesajúcimi exponentami majú tvar

$$\begin{aligned}x^{\underline{-1}} &= \frac{1}{x+1},\\ x^{\underline{-2}} &= \frac{1}{(x+1)(x+2)},\\ x^{\underline{-3}} &= \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)},\end{aligned}$$

a vo všeobecnosti definujeme mocninu s klesajúcim exponentom pre záporný exponent

$$x^{\underline{-m}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+m)}, \qquad \text{pre } m > 0. \tag{2.29}$$

(Je tiež možné definovať mocninu s klesajúcim exponentom pre reálne alebo dokonca aj pre komplexné m, ale to robiť nebudeme.) Takto definované mocniny s klesajúcimi exponentami majú pekné vlastnosti. Snáď najdôležitejšie je všeobecný zákon pre exponenty, analogicky k zákonu

$$x^{m+n} = x^m x^n$$

pre klasické mocniny. Verzia pre mocniny s klesajúcimi exponentami je

$$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}}, \qquad \text{pre celé čísla } m \text{ a } n. \tag{2.30}$$

Napríklad $x^{\underline{2+3}} = x^{\underline{2}}(x-2)^{\underline{3}}$, a pre záporné n dostávame

$$x^{\underline{2-3}} = x^{\underline{2}} \cdot (x-2)^{\underline{-3}} = x(x-1)\frac{1}{(x-1)x(x+1)} = \frac{1}{x+1} = x^{\underline{-1}}.$$

Ak by sme sa rozhodli definovať $x^{\underline{-1}}$ ako $1/x$ namiesto $1/(x+1)$, zákon pre exponenty (2.30) by zlyhal v prípadoch typu $m=-1$ a $n=1$. V skutočnosti, mohli by sme použiť vzťah (2.30) na to, aby sme zistili koľko mocnín s klesajúcim exponentom musí byť definované v prípade pre záporné exponenty, položením $m=-n$. Keď existujúce označenie je rozšíriteľné na pokrytie viacerých prípadov, je vždy najlepšie formulovať definíciu tak, aby všeobecné zákony naďalej platili.

Teraz sa ubezpečme, že rozhodujúca vlastnosť diferencie platí aj pre nami novo definované mocniny s klesajúcim exponentom. Platí tiež, že $\Delta x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}}$, keď $m<0$? Ak napríklad $m=-2$, diferencia je

$$\begin{aligned}\Delta x^{\underline{-2}} &= \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)}\\ &= \frac{(x+1)-(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}\\ &= -2x^{\underline{-3}}.\end{aligned}$$

Fajn—funguje to! Podobne aj pre všetky $m<0$.

Ukázali sme, že sumačná vlastnosť (2.28) platí aj pre záporné mocniny s klesajúcimi exponentami rovnako ako pre kladné exponenty, kým sa neobjaví žiadne delenie nulou:

$$\sum\nolimits_a^b x^{\underline{m}}\,\delta x = \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\Big|_a^b \qquad \text{pre celé } m \neq -1.$$

Ale čo v prípade, keď $m=-1$?

Pripomeňme si, že v integrálnom počte používame

$$\int_a^b x^{-1}\,dx = \ln x\,\Big|_a^b$$

keď $m=-1$. Radi by sme dostali analogiu funkcie $\ln x$. Inými slovami hľadáme funkciu $f(x)$ takú, že

$$x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1} = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Nie je ťažké vidieť, že

$$f(x) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{x}$$

je vhodná funkcia, ktorá spĺňa horeuvedenú podmienku. Keď x je celočíselné, táto veličina sa nazýva harmonické číslo H_x. Preto H_x je diskrétna analógia spojitej funkcie $\ln x$. (Nie je bez zaujímavostí, že pre celočíselné hodnoty x, hodnota $H_x - \ln x$ je približne $0.577 + 1/(2x)$ pre veľké x. Preto H_x a $\ln x$ nie sú len analogické funkcie, ale ich hodnoty sa vždy odlišujú menej ako 1.)

Teraz uvedieme úplnú definíciu súčtu s mocninami s klesajúcimi exponentami:

$$\sum\nolimits_a^b x^{\underline{m}}\,\delta x = \begin{cases} \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\big|_a^b, & \text{pre } m \neq -1;\\ H_x\,\big|_a^b, & \text{pre } m = -1.\end{cases} \tag{2.31}$$

Táto formula naznačuje, prečo harmonické čísla sa vyskytujú v riešeniach diskrétnych úloh, napríklad pri analýze triedenia quick-sortu. Rovnako ako tzv. prirodzené logaritmy vznikajú prirodzene v riešeniach spojitých úloh.

Dobre, našli sme analógiu k funkcii $\ln x$. Poďme sa pozrieť, či existuje aj funkcia e^x. Aká funkcia $f(x)$ má vlastnosť $\Delta f(x) = f(x)$, čo zodpovedá identite $De^x = e^x$? To je ľahké:

$$f(x+1) - f(x) = f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x+1) = 2f(x);$$

Budeme sa zaoberať jednoduchým rekurentým vzťahom, pričom funkciu $f(x) = 2^x$ budeme považovať za diskrétnu exponenciálnu funkciu.

Diferencia funkcie c^x je pre ľubovoľné c jednoduchá, konkrétne

$$\Delta(c^x) = c^{x+1} - c^x = (c-1)c^x.$$

Preto anti-diferencia funkcie c^x je funkcie $c^x/(c-1)$, ak $c \neq -1$. Tento poznatok spolu so základnými zákonmi (2.25) a (2.26) nám dávajú peknú možnosť, ako inak porozumieť všeobecnej formule pre súčte geometrickej rady:

$$\sum_{a\le k<b} c^k = \sum\nolimits_a^b c^x\,\delta x = \frac{c^x}{c-1}\Big|_a^b = \frac{c^b - c^a}{c-1}, \qquad \text{pre } c \neq 1.$$

Vždy, keď sa stretneme s funkciou f, ktorá by mohla byť ako explicitný výraz, vieme vypočítať jej diferenciu $\Delta f = g$; potom máme funkciu g, ktorej neurčitý súčet $\sum g(x)\delta x$ je známy.

$f = \sum g$	$\Delta f = g$	$f = \sum g$	$\Delta f = g$
$x^{\underline{0}} = 1$	0	2^x	2^x
$x^{\underline{1}} = x$	1	c^x	$(c-1)c^x$
$x^{\underline{2}} = x(x-1)$	$2x$	$c^x/(c-1)$	c^x
$x^{\underline{m}}$	$mx^{\underline{m-1}}$	cf	$c\Delta f$
$x^{\underline{m+1}}/(m+1)$	$x^{\underline{m}}$	$f+g$	$\Delta f + \Delta g$
H_x	$x^{\underline{-1}} = 1/(x+1)$	fg	$f\Delta g + Eg\Delta f$

Napriek všetkým paralelám medzi spojitou a diskrétnou matematikou, niektoré pojmy zo spojitej matematiky nemajú obdobu v diskrétnej matematike. Napríklad, pravidlo derivácie zloženej funkcie v infinitezimálnom počte, ktoré popisuje, ako získať deriváciu funkcie závisiacej na nejakej funkcii. V konečnom kalkule niet žiadnej obdoby tohoto zákona, pretože tu neexistuje žiadny pekný výraz typu $\Delta f(g(x))$. Zámena premennej v diskrétnom kalkule je zložitejšia, snáď okrem prípadu substitúcie výrazu $c \pm x$ za premennú x.

Avšak, $\Delta\big(f(x)g(x)\big)$ *má* celkom pekný tvar, a umožňuje nám *sumáciu po častiach*, ako konečnú variantu toho, čo v infinitezimálnom počte nazývame integrovanie po častiach (per-partes). Pripomeňme si tú formulu

$$D(uv) = uDv + vDu$$

infinitezimálneho počtu, na základe ktorej funguje pravidlo integrovania po častiach

$$\int uDv = uv - \int vDu.$$

Niečo podobné môžeme urobiť v konečnom kalkule.

Začnime použitíme oprátora diferencie na súčin dvoch funkcii $u(x)$ a $v(x)$:

$$\begin{aligned}\Delta\big(u(x)v(x)\big) &= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x)\\ &= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x+1)\\ &\quad + u(x)v(x+1) - u(x)v(x)\\ &= u(x)\Delta v(x) + v(x+1)\Delta u(x).\end{aligned} \tag{2.32}$$

Túto formulu môžeme prepísať do tradičného tvaru použitím *operátora posunu* E, ktorý je definovaný nasledovne

$$Ef(x) = f(x+1).$$

Nahradením miesto $v(x+1)$ dostávame kompaktný tvar pravidla pre diferenciu súčinu:

$$\Delta(uv) = u\Delta v + Ev\Delta u. \tag{2.33}$$

(Operátor E je vlastne len taká nuansa, ktorá však robí rovnicu korektnou.)

Ak uvažujeme neurčité súčty na oboch stranách rovnice a preusporiadame členy, dostaneme reklamované previdlo pre sčitovanie po častiach:

$$\sum u\Delta v = uv - \sum Ev\Delta u \tag{2.34}$$

Podobne, ako v inifinitezimálnom kalkule, ku všetkým trom členom môžeme pripísať hranice, čím sa stanú neurčité súčty určitými.

Toto pravidlo je užitočné, ak súčet na ľavej strane je ťažšie vypočítateľný ako na pravej strane. Pozrime sa na príklad.

Príklad. Funkcia $\int xe^x\,dx$ je typická funkcia vhodná na integrovanie po častiach; jej diskrétna varianta je $\sum x2^x\,\delta x$, s ktorou sme sa v minulosti stretli v tvare $\sum_{k=0}^{n} k2^k$. Na sčítanie po častiach, položíme $u(x) = x$ a $\Delta v(x) = 2^x$, lebo $\Delta u(x) = 1$, $v(x) = 2^x$ a $Ev(x) = 2^{x+1}$. Dosadením do rovnosti (2.34) dostávame

$$\sum x2^x\,\delta x = x2^x - \sum 2^{x+1}\,\delta x = x2^x - 2^{x+1} + C.$$

Po dosadení hraníc dostávame

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k2^k &= \sum\nolimits_0^{n+1} x2^x\delta x \\ &= x2^x - 2^{x+1}\,\big|_0^{n+1} \\ &= \big((n+1)2^{n+1} - 2^{n+2}\big) - (0\cdot 2^0 - 2^1) = (n-1)2^{n+1} + 2.\end{aligned}$$

Je ľahšie nájsť tento súčet touto metódou ako metódou perturbácie, lebo nemusíme rozmýšľať. □

Príklad. Demoštrujme túto metódu na súčte, ktorý vyzerá ešte ťažšie, $\sum_{0\le k<n} kH_k$. Riešenie nie je zložité, ak sa necháme viesť analógiou s integrálom $\int x\ln x\,dx$. Nech $u(x) = H_x$ a $\Delta v(x) = x = x^{\underline{1}}$, lebo $\Delta u(x) = x^{\underline{-1}}$, $v(x) = x^{\underline{2}}/2$, $Ev(x) = (x+1)^{\underline{2}}/2$ a platí, že

$$\begin{aligned}\sum xH_x\delta x &= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x - \sum \frac{(x+1)^{\underline{2}}}{2}x^{\underline{-1}}\delta x \\ &= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x - \frac{1}{2}\sum x^{\underline{1}}\delta x \\ &= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x - \frac{x^{\underline{2}}}{4} + C.\end{aligned}$$

(V prvkom riadku sme použitím zákona o exponentoch (2.30) zlúčili dve mocniny s klesajúcimi exponentami $(x+1)^{\underline{2}}x^{\underline{-1}}$.) Teraz môžeme dopísať hranice a dostávame, že

$$\sum_{0\le k<n} kH_k = \sum\nolimits_0^n xH_x\delta x \;=\; \frac{n^{\underline{2}}}{2}\Big(H_n - \frac{1}{2}\Big).$$

□

2.6 Súčty a rekurentné vzťahy

O vzťahu sumy a rekurencie sme už niečo hovorili v časti 2.4.2. Opačne, mnohé rekurentné vzťahy môžeme redukovať na súčty, preto sa v tejto kapitole oboznámime so špeciálnymi metódami na výpočet súčtov, ktoré nám pomôžu riešiť rekurentné rovnice, ktoré by sme inak riešili obtiažne. Rekurentné vzťahy pre úlohu Hanojských veží sú toho príkladom:

$$\begin{aligned}T_0 &= 0;\\ T_n &= 2T_{n-1} + 1, \qquad \text{pre } n > 0.\end{aligned}$$

Upravíme ich do špeciálneho tvaru podobného tvaru sumy tak, že vydelíme obe strany 2^n:

$$\begin{aligned}\frac{T_0}{2^0} &= 0;\\ \frac{T_n}{2^n} &= \frac{T_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}, \qquad \text{pre } n > 0.\end{aligned}$$

Teraz položíme $S_n = \frac{T_n}{2^n}$ a dostávame

$$\begin{aligned}S_0 &= 0;\\ S_n &= S_{n-1} + 2^{-n}, \qquad \text{pre } n > 0.\end{aligned}$$

Z toho vyplýva vzťah

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}.$$

(Poznamenajme, že sme zo súčtu vynechali člen pre $k = 0$). Súčet geometrickej rady $2^{-1}+2^{-2}+\dots+2^{-n} = (\frac{1}{2})^1+(\frac{1}{2})^2+\dots+(\frac{1}{2})^n$ odvodíme v tejto kapitole neskôr a ukážeme, že je $1-(\frac{1}{2})^n$. Preto $T_n = 2^nS_n = 2^n-1$.

V tomto odvodení sme previedli T_n na S_n tým, že sme rekurentné vzťahy vydelili číslom 2^n. Tento trik je špeciálny prípad metódy, ktorá môže redukovať skutočne ľubovoľný rekurentný vzťah tvaru

$$a_nT_n = b_nT_{n-1} + c_n \tag{2.35}$$

na súčet. Myšlienka spočíva na triku vynásobiť obe strany *sumarizačným členom* s_n:

$$s_na_nT_n = s_nb_nT_{n-1} + s_nc_n.$$

Tento člen je chytré zvoliť tak, aby

$$s_nb_n = s_{n-1}a_{n-1}.$$

Potom, ak označíme $S_n = s_na_nT_n$, dostaneme rekurentný súčet,

$$S_n = S_{n-1} + s_nc_n.$$

Preto

$$S_n = s_0a_0T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_kc_k \;=\; s_1b_1T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_kc_k,$$

a riešenie pôvodnej rekurentnej rovnice (2.35) je

$$T_n = \frac{1}{s_na_n}\Big(s_1b_1T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_kc_k\Big). \tag{2.36}$$

Napríklad, keď $n = 1$, dostaneme $T_1 = (s_1b_1T_0 + s_1c_1)/s_1a_1 = (b_1T_0 + c_1)/a_1$.

Ale ako byť dostatočne chytrý pri hľadaní správneho s_n? To nie je problém! Vzťah $s_n = s_{n-1}a_{n-1}/b_n$ môžeme rozvinúť do zlomku,

$$s_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1}{b_nb_{n-1}\dots b_2}, \tag{2.37}$$

ktorý sám alebo nejaký jeho násobok, je vhodný ako s_n. Napríklad v prípade rekurentných vzťahov pre Hanojské veže sú $a_n = 1$ a $b_n = 2$ a všeobecná metóda, ktorú sme práve odvodili, hovorí, že $s_n = 2^{-n}$ je vhodný násobok na násobenie rekurentnej rovnice, ak ju chceme redukovať na súčet. Na objavenie tohoto súčiniteľa nepotrebujeme skvelý záblesk inšpirácie.

Musíme byť však opatrní, aby sme sa nedopustili delenia nulou. Popísaná metóda funguje vždy, ak všetky koeficienty a a b sú nenulové.