3 Kombinatorické počítanie

3.1 Kombinácie

Definition 3.1 *Nech M je ľubovoľná n prvková množina.* Kombináciou *množiny M nazveme jej ľubovoľnú podmnožinu. Ak je podmnožina k prvková, hovoríme o k-kombinácii, $n,\ k \in \mathbb{N}$.*

Nech $C(n,k)$ označuje počet všetkých k-kombinácií n prvkovej množiny.

Poznámka. Číslo $C(n,k)$ sa obvykle značí ako kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ (alebo tiež binomický koeficient) a má rozumnú kombinatorickú interpretáciu len pre $n,\ k \in \mathbb{N}$. Neskôr si zobecníme túto definíciu pre širšie obory hodnôt n a k.

Príklad. Ak $M = \{1,2,3,4,5\}$, potom existuje jediná 0-kombinácia a to $\emptyset$, 5 rôznych 1-kombinácií $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, 10 rôznych 2-kombinácií, ...

Lemma 3.1 *Pre ľubovoľné prirodzené číslo n platí:*

i. $C(n,0) = C(n,n) = 1$, $C(n,1) = n$ *a pre* $k > n$ *platí* $C(n,k) = 0$,

ii. $C(n,k) = C(n,n-k)$ *pre* $0 \le k \le n$.

iii. $C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$, *pre* $1 \le k \le n$.

Dôkaz. Nech M je ľubovoľná n prvková množina.

(i) Zrejmé z definície.

(ii) Označme $A(k)$, resp. $A(n-k)$ množinu všetkých k-kombinácií množiny M, resp. $(n-k)$-kombinácií. Definujme zobrazenie $\varphi : A(k) \to A(n-k)$ nasledujúco: ak $X \in A(k)$, potom $\varphi(X) = M \setminus X$. Zrejme $\varphi(X) \in A(n-k)$ a definované zobrazenie je bijekciou. Potom nutne $C(n,k) = C(n,n-k)$.

(iii) Zvoľme $x \in M$ pevne. Potom všetky k-kombinácie množiny M môžme rozdeliť do dvoch skupín:
(a) ktoré neobsahujú prvok x, tých je $C(n-1,k)$;
(b) ktoré obsahujú prvok x, tých je $C(n-1,k-1)$.
Zrejme teda $C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$, pre $1 \le k \le n$. □

Faktoriál je definovaný predpisom $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$ a kladieme $0! = 1$.

Veta 3.1 *Pre $0 \le k \le n$ platí*

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Dôkaz. Pre $n = 0$ tvrdenie zrejme platí.

Predpokladajme platnosť tvrdenia pre $n-1$ a všetky k, $0 \le k < n$. Na základe predchádzajúcej lemy a indukčného predpokladu máme:

$$\begin{aligned} C(n,k) &= C(n-1,k) + C(n-1,k-1) = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!} \cdot \frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

□

Poznámka. Všimnime si, že z vety vyplýva aj zaujímavý fakt, že $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ je celé číslo pre ľubovoľné prirodzené čísla n a k, $1 \le k \le n$.

3.2 Permutácie

Definition 3.2 Permutáciou *množiny M nazývame jej bijekciu na seba. Počet všetkých permutácii množiny M označujeme $P(M)$.*

Príklad. Vymenujme všetky permutácie množiny $M = \{1,2,3,4\}$: 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, ... Pri vymenovávaní permutácií je vhodné zvoliť si nejaký systém.

Veta 3.2 *Počet permutácií n prvkovej množiny je $n!$, $n \in \mathbb{N}$.*

Dôkaz. Zrejme najjednoduchší je dôkaz matematickou indukciu. Pre $n = 1$ vzorec platí. Predpokladajme platnosť pre ľubovoľnú n prvkovú množinu.

Pre $n+1$ prvkovú množinu M_{n+1} zrejme platí $P(M_{n+1}) = (n+1) \cdot P(M_n) = (n+1)!$. □

3.3 Variácie

Definition 3.3 *Permutácie k-kombinácií n-prvkovej množiny M sa nazývajú* k-variácie *množiny M. Počet všetkých k-variácií n-prvkovej množiny označujeme $V(n,k)$, $n,\ k \in \mathbb{N}$.*

Príklad. Vymenujme všetky 2-variácie množiny $M = \{1,2,3,4\}$: 12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34, 43.

Zrejme každá k-kombinácia má $k!$ rôznych k-variácií, t.j.

$$V(n,k) = C(n,k)k! = \frac{n!}{k!(n-k)!}k! = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

Príklad. Koľko jedno až štvorciferných čísel možno zostaviť pomocou cifier 0, 1, 2, 3 ak sa v žiadnom z čísel nijaká cifra nemá opakovať.

Keby medzi ciframi nebola 0, hľadaný počet by bol $V(4,1) + V(4,2) + V(4,3) + V(4,4) = 64$. Počet jedno- až štvorciferných čísel zostavených z uvedených cifier začínajúcich 0 je: $V(3,0) + V(3,1) + V(3,2) + V(3,3) = 16$, spolu teda $64 - 16 = 48$.

3.4 Variácie a kombinácie s opakovaním

Definition 3.4 *Usporiadaná k-tica prvkov n prvkovej množiny (prvky sa môžu aj opakovať) sa nazýva* k-variácia s opakovaním. *Počet k-variácií s opakovaním označujeme $V'(n,k)$.*

Poznámka. Zrejme v tomto prípade môže byť aj $k > n$.

Príklad. Nech $M = \{1,2\}$. Potom existuje jediná 0-variácia a to $\emptyset$, dve 1-variácie 1, 2; štyri 2-variácie 11, 12, 21, 22, ...

Veta 3.3 *Pre $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}_0$ platí: $V'(n,k) = n^k$.*

Dôkaz. Urobíme matematickou indukciou vzhľadom na k. Pre $k = 0, 1$ je tvrdenie pravdivé. Predpokladajme, že platí $V'(n,k-1) = n^{k-1}$. Zrejme všetky usporiadané k-tice možno vytvoriť z $(k-1)$-tíc tak, že ku každej dodáme jeden prvok na koniec, teda

$$V'(n,k) = nV'(n,k-1) = n \cdot n^{k-1} = n^k.$$

□

Definition 3.5 Kombinácia s opakovaním *k prvkov z n prvkovej množiny reprezentujúcej rôzne druhy je ľubovoľný výber k prvkov (t.j. neusporiadaný), pričom každý z prvkov je jedného z n druhov (predpokladá sa, že prvkov každého druhu je aspoň k). Počet k-kombinácií s opakovaním pre n prvkovú množinu M budeme značiť $C'(n,k)$.*

Poznámka. Označme $W(n,k)$ množinu všetkých k-variácií s opakovaním z n prvkovej množiny. Na množine $W(n,k)$ definujme reláciu R nasledovne: nech $A, B \in W(n,k)$, potom ARB práve vtedy, keď k-tice A a B sa líšia len poradím prvkov.

Napríklad $122, 212, 221 \in W(2,3)$, t.j. $122R212$, kým $122R112$.

Ľahko sa možno presvedčiť, že R je ekvivalencia na množine $W(n,k)$, t.j. R indukuje na množine $W(n,k)$ rozklad.

Triedy rozkladu množiny $W(n,k)$ indukovaného reláciou R predstavujú k-kombinácie s opakovaním.

Určenie počtu všetkých k-kombinácií s opakovaním je trochu zložitejšie ako vo všetkých predchádzajúcich prípadoch. Nech x_i označuje koľkokrát sa i-ty prvok n M nachádza v nejakej k-kombinácii s opakovaním. Pre takto definované čísla x_i zrejme musí platiť

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k. \tag{3.1}$$

Určiť počet všetkých k-kombinácií n prvkovej množiny M s opakovaním znamená vlastne určiť počet všetkých celočíselných nezáporných riešení rovnice (3.1).

Majte spolu k guličiek umiestnených v rade a $n-1$ paličiek (oba druhy predmetov sú nerozlíšiteľné), umiestňujme paličky medzi guličky. Zrejme každému riešeniu rovnice (3.1) prislúcha práve jedno rozmiestnenie paličiek medzi guličky. Paličky umiestňujeme na $(n+k-1)$ miest a vyberáme $(n-1)$ pozícií, čo môžme urobiť $\binom{n+k-1}{n-1}$ spôsobmi. Dokázali sme teda:

Veta 3.4 *Pre prirodzené čísla n, k, $k \le n$ platí*

$$C'(n,k) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}.$$

3.5 Polynomická veta

Veta 3.5 *Nech n a k sú ľubovoľné prirodzené čísla, x_1, x_2, $\ldots$, x_k ľubovoľné komplexné čísla. Potom platí*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$$

kde súčet sa vzťahuje na všetky prirodzené k-tice nezáporných celých čísel n_1, $\ldots$, n_k pre ktoré platí $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

Dôkaz. Skúmajme výraz

$$\underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)\ldots(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)}_{n\text{-krát}}. \tag{3.2}$$

Pri násobení zrejme dostaneme členy tvaru $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$, kde $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, pretože každý člen je súčinom n čísiel. Skúsme určiť aký bude v (3.2) koeficient pri člene $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$. Aby sme dostali n_1-tú mocninu čísla x_1, musíme v n_1 výrazoch v zátvorkách vybrať prvý člen. To sa dá uskutočniť práve $\binom{n}{n_1}$ spôsobmi.

Aby sme dostali n_2-tú mocninu čísla x_2, musíme v n_2 výrazoch v zátvorkách vybrať druhý člen; tento výber sa dá uskutočniť v zvyšných $(n-n_1)$ zátvorkách a to práve $\binom{n-n_1}{n_2}$ spôsobmi. Celkove teda existuje $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}$ spôsobov na vybratie n_1 členov x_1 a n_2 členov x_2.

Postupujme ďalej: tretí člen x_3 možno vybrať n_3-krát v zvyšných $n-n_1-n_2$ zátvorkách, t.j. $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ spôsobmi, atď.

Pokračujúc v tejto úvahe dôjdeme k záveru, že koeficient pri člene $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$ vo výraze (3.2) sa rovná číslu

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}.$$

Uvedené číslo možno upraviť nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} & \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k} \\ = \; & \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots-n_{r-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\cdots-n_k)!} \\ = \; & \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}. \end{aligned}$$

□

Poznámka. Výraz $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$ sa nazýva multinomický koeficient a niekedy sa zapisuje v tvare:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

Dá sa nahliadnuť, že dané číslo odpovedá počtu rôznych zoradení n predmetov, pričom máme k dispozícii n_1 nerozlíšiteľných predmetov prvého druhu, n_2 nerozlíšiteľných predmetov druhého druhu, $\ldots$, n_k nerozlíšiteľných predmetov k druhu, pričom $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

Zrejme každý výraz $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$ sa v mocnine objavuje s celočíselným koeficientom a preto z polynomickej vety vyplýva, že

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

je vždy celé číslo, kde n_1, $\ldots$, n_k sú nezáporné celé čísla, pre ktoré platí $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

Dôsledok 3.1 *Ak v polynomickej vete položíme $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 1$, dostávame zaujímavú identitu:*

$$\sum \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} = k^n$$

kde súčet sa vzťahuje na všetky k-tice nezáporných celých čísel n_1, $\ldots$, n_k pre ktoré platí $n_1+n_2+\cdots+n_k = n$.

Dôsledok 3.2 *1. Ak v polynomickej vete položíme $k = 2$, dostaneme tzv. binomickú vetu (preto sa kombinačným číslam hovorí aj binomické koeficienty):*

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{n_1, n_2 \ge 0, n_1+n_2=n} \frac{n!}{n_1!n_2!} x_1^{n_1} x_2^{n_2},$$

čo môžme prepísať do tvaru:

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x_1^i x_2^{n-i}.$$

2. Ak v predchádzajúcom prípade položíme $x_1 = x_2 = 1$, dostávame

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n,$$

čo má veľa kombinatorických interpretácií: napr. počet všetkých podmnožín n prvkovej množiny je 2^n alebo že súčet čísel v riadku Pascalovho trojuholníka je práve 2^n.

3. Ak v prípade pre $k = 2$ položíme $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ dostávame

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0, \tag{3.3}$$

čo má možno interpretovať napr., že párnych podmnožín n prvkovej množiny je práve toľko, koľko nepárnych podmnožín alebo že alternujúci súčet čísel v riadku Pascalovho trojuholníka je práve 0.

Práve odvodená rovnosť (3.3) je jadrom dôkazu jednej zo základných kombinatorických metód, tzv. princípu zapojenia a vypojenia.

3.6 Princíp zapojenia a vypojenia

Príklad. Majme danú množinu X o 98 prvkoch. Nech A, B a C sú jej podmnožiny a nech platí: $|A| = 72$, $|B| = 48$, $|C| = 20$, $|A \cap B| = 30$, $|A \cap C| = 15$, $|B \cap C| = 13$, $|A \cap B \cap C| = 10$. Určte počet prvkov množiny X, ktoré nepatria ani do jednej z podmnožín A, B, C.

Riešenie: $98 - (72 + 48 + 20) + (30 + 15 + 13) - 10 = 156 - 150 = 6$.

Princíp inklúzie a exklúzie je vzťah, podľa ktorého je možné riešiť úlohy podobného typu obecne.

Majme daných m objektov a k vlastností (označme ich $a_1, a_2, \dots, a_k$), kde m a k sú prirodzené čísla. Označme $M(a_i)$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ počet tých objektov, ktoré majú vlastnosť a_i; $M(a_i a_j)$ počet tých objektov, ktoré majú súčasne vlastnosť a_i aj vlastnosť a_j $(i \neq j)$; $M(a_i a_j a_t)$ počet tých objektov, ktoré majú súčasne tri vlastnosti a_i, a_j, a_t, atď. Konečne, znakom $M(0)$ označme počet tých objektov, ktoré nemajú ani jednu z daných vlastností.

Veta 3.6 *Pre vyššie opísané symboly platí rovnosť:*

$$M(0) = m - \sum_{i=1}^{k} M(a_i) + \sum_{i,j=1;i<j}^{k} M(a_i a_j) - \sum_{i,j,t=1;i<j<t}^{k} M(a_i a_j a_t) + \dots + (-1)^k M(a_1 a_2 \dots a_k). \quad (3.4)$$

Dôkaz. Objekt, ktorý nemá ani jednu z vlastností a_i prispieva jednotkou k číslu $M(0)$ aj k m, ale vo zvyšných sčítancoch vzťahu (3.4) sa nevyskytuje. Ak nejaký objekt má t vlastností, $t \geq 1$, potom prispieva jednotkou k číslu m, t jednotkami k sume $\sum M(a_i)$, $\binom{t}{2}$ jednotkami k sume $\sum M(a_i a_j)$, atď. Teda objekt s t vlastnosťami $(t \geq 1)$ prispieva k pravej strane

$$1 - t + \binom{t}{2} - \dots + (-1)^t \binom{t}{t}$$

jednotkami, ale podľa (3.3) toto číslo sa rovná nule pre každé t. Zhrnutie: objekt, ktorý nemá nijakú z vlastností a_i prispieva k obidvom stranám vzťahu (3.4) jednou jednotkou, kým príspevok objektu s aspoň jednou vlastnosťou je k obidvom stranám nulový. Tým je dôkaz ukončený. □

Poznámka. Predchádzajúce tvrdenie sa niekedy zvykne formulovať aj v nasledujúcom tvare, ak A_i označuje množinu objektov s vlastnosťou a_i, potom

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = \sum_{i=1}^{k} M(a_i) - \sum_{i,j=1;i<j}^{k} M(a_i a_j) + \sum_{i,j,t=1;i<j<t}^{k} M(a_i a_j a_t) - \dots + (-1)^k M(a_1 a_2 \dots a_k).$$

Príklad. (Problém šatnárky) Ctihodní pánovia v počte n prídu na zhromaždenie, všetci v klobúkoch a odložia si svoje klobúky do šatne. Pri odchode roztržitá šatnárka dá každému pánovi náhodne jeden z klobúkov. Aká je pravdepodobnosť, že žiadny pán nedostane od šatnárky späť svoj klobúk?

Tento problém sformulovaný ako hračka je pozoruhodný a svojho času zamestnával matematických géniov tej doby. Najprv ho preformulujme pomocou permutácií. Očíslujme pánov $1, 2, \dots, n$ a ich klobúky tiež. Potom činnosť šatnárky vedie k náhodnej permutácii π množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, kde $\pi(i)$ je číslo klobúku vrátenému i-temu pánovi. Otázka znie, s akou pravdepodobnosťou platí $\pi(i) \neq i$ pre všetky $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Nazveme index i spĺňajúci $\pi(i) = i$ pevným bodom permutácie π. Pýtame sa teda, aká je pravdepodobnosť, že náhodne zvolená permutácia nemá žiadny pevný bod. Ak označíme $s(n)$ počet permutácií bez pevného bodu, bude skúmaná pravdepodobnosť $s(n)/n!$.

Pomocou princípu inklúzie a exklúzie sa dá odvodiť vzorec pre $s(n)$. Budeme hľadať počet „zlých“ permutácií, t.j. permutácií s aspoň jedným pevným bodom. Nech $S(n)$ označuje množinu všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ a pre $i = 1, 2, \dots, n$ definujme $A_i = \{\pi \in S(n); \pi(i) = i\}$. Zlé permutácie sú práve zjednotenia všetkých A_i.

Aby sme mohli aplikovať princíp inklúzie a exklúzie, musíme vyjadriť veľkosť l-násobných prienikov množín A_i. Ľahko je vidieť, že $|A_i| = (n-1)!$. Aké permutácie sú napríklad v $A_1 \cap A_2$? Práve tie, ktoré majú 1 a 2 ako pevné body, takých je $(n-2)!$. Obecne pre ľubovoľné $i_1 < i_2 < \dots < i_l$ máme $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_l}| = (n-l)!$ a preto dosadením do princípu inklúzie a exklúzie vyjde

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} \binom{n}{l} (n-l)! = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} \frac{n!}{l!}.$$

Dané číslo udáva počet permutácií s aspoň jedným pevným bodom, počet $s(n)$ je teda rovný

$$s(n) = n! - |A_1 \cup \dots \cup A_n| = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!},$$

čo môžme prepísať na tvar

$$s(n) = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

Súčet rady v zátvorke konverguje pre rastúce n k e^{-1}, celková pravdepodobnosť preto konverguje k e^{-1}.

3.7 Odhady kombinačných čísel a faktoriálu

3.7.1 Odhad faktoriálu

Zrejme pre každé $n \geq 1$ platí $n! \leq n^n$, ako je vidieť z definície faktoriálu.

Presnejší odhad dokázal Gauss pekným trikom... Najskôr však potrebujeme nasledujúcu lemu:

Lemma 3.2 *Pre každú dvojicu kladných reálnych čísel a, b, geometrický priemer $\sqrt{ab}$ je rovný nanajvýš aritmetickému $\frac{a+b}{2}$.*

Dôkaz. Zrejme $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Po rozpísaní ľavej strany máme: $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$, čím dostávame $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. □

Veta 3.7 *Pre každé prirodzené číslo n, $n \geq 1$ platí*

$$n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^n.$$

Dôkaz. Platí

$$\begin{aligned} (n!)^2 &= 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \\ &= (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot ((n-1) \cdot 2)(n \cdot 1) \\ &= \prod_{i=1}^{n} i(n+1-i). \end{aligned}$$

Ak v predchádzajúcej lemme zvolíme $a = i$, $b = n + 1 - i$, dostávame:

$$\sqrt{i \cdot (n+1-i)} \leq \frac{i + n + 1 - i}{2} = \frac{n+1}{2},$$

čiže

$$n! = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{i \cdot (n+1-i)} \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{n+1}{2} = \left(\frac{n+1}{2} \right)^n.$$

Pre dôkaz druhej strany nerovnosti sa dá využiť súčin: $i \cdot (n+1-i)$. Pre $i = 1$ a $i = n$ je rovný n a pre $2 \leq i \leq n-1$ máme súčin dvoch čísel, z ktorých je jedno aspoň $\frac{n}{2}$ a menšie je aspoň 2 a teda súčin je aspoň n. Dostávame:

$$(n!)^2 = \prod_{i=1}^{n} i(n+1-i) \geq \prod_{i=1}^{n} n = n^n$$

a preto $n! \geq \sqrt{n^n} = n^{\frac{n}{2}}$, ako sme chceli dokázať. □

Presnejší odhad faktoriálu je známy pod menom Stirlingova formula. Ak definujeme funkciu:

$$f(n) = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n,$$

potom platí

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{n!} = 1.$$

3.7.2 Odhady binomických koeficientov

Podobne ako sme vyšetrovali chovanie funkcie $n!$, budeme sa teraz zaoberať odhadmi kombinačných čísel

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot k} = \prod_{i=0}^{k-1}\frac{n-i}{k-i}.$$

Je hneď viedieť, že

$$\binom{n}{k} \le n^k,$$

a pre mnoho použití s daným odhadom vystačíme.

Aby sme odvodili dolný odhad, pozrieme sa na definíciu binomického koeficientu zapísanú ako súčin zlomkov tak ako v horeuvedenom vzorci. Pre $n \ge k > i \ge 0$ platí $(n-i)/(k-i) \ge n/k$ a preto

$$\binom{n}{k} \ge \left(\frac{n}{k}\right)^k.$$

Nasledujúci vylepšený horný odhad je podobného tvaru a na jeho dôkaze predvedieme ešte jednu ďalšiu metódu.

Poznámka. Ľahko sa nahliadne nasledujúci fakt: pre každé reálne číslo x platí

$$1 + x \le e^x.$$

Označme $f(x) = e^x - 1 - x$, zrejme $f'(x) = e^x - 1$. Funkcia $f'(x)$ má minimum v $x = 0$, pretože $f'(x) < 0$ pre $x \in (-\infty, 0\rangle$ (t.j. f je klesajúca) a $f'(x) > 0$ pre $x \in \langle 0, \infty)$ (t.j. f je rastúca).

Pretože $f(0) = 0$ a v 0 má funkcia minimum, zrejme $f(x) \ge 0$.

Veta 3.8 *Pre každé prirodzené číslo n a k, $1 \le k \le n$, platí*

$$\binom{n}{k} \le \left(\frac{en}{k}\right)^k.$$

Dôkaz. Dokážeme v skutočnosti silnejšiu nerovnosť:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{k} \le \left(\frac{en}{k}\right)^k.$$

Vyjdeme z binomickej vety, ktorá hovorí o platnosti

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n.$$

Predpokladajme teraz, že $0 < x \le 1$. Potom vynechaním niektorých sčítancov na ľavej strane dostaneme

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{k}x^k \le (1+x)^n$$

a vydelením obidvoch strán číslom x^k máme

$$\frac{1}{x^k}\binom{n}{0} + \frac{1}{x^{k-1}}\binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k} \le \frac{(1+x)^n}{x^k}.$$

Každé z kombinačných čísel na ľavej strane je vynásobené číslom väčším alebo rovným jednej (lebo sme predpokladali $x \le 1$); a ak vynecháme tieto koeficienty, ľavú stranu nezväčšíme. Vyjde

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k} \le \frac{(1+x)^n}{x^k}.$$

Číslo x z intervalu $(0, 1\rangle$ môžeme zvoliť podľa potreby a urobíme to tak, aby bola pravá strana čo najmenšia. Vhodná hodnota je $x = \frac{k}{n}$. Dosadením tohoto výrazu do pravej strany máme

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k} \le \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \left(\frac{n}{k}\right)^k.$$

Konečne s využitím známeho faktu vychádza

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \le (e^{\frac{k}{n}})^n = e^k,$$

a z toho už máme tvrdenie vety. □

Z definície kombinačného čísla ľahko vyplýva nasledujúci vzorec:

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}.$$

Preto pre $k \le \frac{n}{2}$ máme $\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1}$ a naopak pre $k \ge \frac{n}{2}$ dostaneme symetricky $\binom{n}{k} > \binom{n}{k+1}$. Teda pre dané n sú medzi kombinačnými číslami $\binom{n}{k}$ najväčšie tie prostredné: pre n párne je $\binom{n}{n/2}$ väčšie než všetky ostatné, pre n nepárne sú dve najväčšie kombinačné čísla $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ a $\binom{n}{\lceil n/2\rceil}$.

Chovanie kombinačných čísel $\binom{n}{k}$ pre dané veľké n a pre premenné k blízke $n/2$ pripomína „hada, ktorý zožral slova z rozprávky o malom princovi“. Výška tejto krivky je práve $\binom{n}{\lceil n/2\rceil}$ a šírka zvonovitého tvaru je približne $2\sqrt{n}$.

Aké veľké je kombinačné číslo $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$? Jednoduchý, ale často dostatočne presný odhad je

$$\frac{2^n}{n+1} \le \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} \le 2^n.$$

Druhá nerovnosť je zrejmá zo súčtu kombinačných čísel v riadku Pascalovho trojuholníka. Analogicky prvá, $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ je najväčšie medzi $n+1$ kombinačnými číslami, ktorých súčet je 2^n.

Teraz ukážeme podstatne presnejší odhad:

Veta 3.9 *Pre každé prirodzené číslo m, $m \ge 1$, platí*

$$\frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} \le \binom{2m}{m} \le \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}.$$

Dôkaz. Obe nerovnosti dokážeme podobne. Uvažujme číslo

$$P = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot 2m}.$$

Pretože

$$P = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot 2m}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot\dots\cdot(2m)}{2\cdot 4\cdot\dots\cdot(2m)} = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2},$$

dostávame, že

$$P = \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}.$$

Chceme teda ukázať

$$\frac{1}{2\sqrt{m}} \le P \le \frac{1}{\sqrt{2m}}.$$

Pre horný odhad uvážme súčin

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{(2m)^2}\right),$$

ktorý môžeme ekvivalentne prepísať na tvar:

$$\left(\frac{1\cdot 3}{2^2}\right)\left(\frac{3\cdot 5}{4^2}\right)\dots\left(\frac{(2m-1)(2m+1)}{(2m)^2}\right) = (2m+1)P^2.$$

Pretože hodnota činiteľov v súčine je zrejme ≤ 1, dostávame $(2m+1)P^2 \leq 1$ a teda $P \leq \frac{1}{\sqrt{2m}}$.

Pre dolný odhad podobne uvážime súčin

$$\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{(2m-1)^2}\right),$$

ktorý prepíšeme na

$$\left(\frac{2\cdot 4}{3^2}\right)\left(\frac{4\cdot 6}{5^2}\right)\dots\left(\frac{(2m-2)(2m)}{(2m-1)^2}\right) = \frac{1}{2(2m)P^2},$$

čo dáva dolný odhad. □

Poznámka. Ak aproximujeme $(2m)!$ a $m!$ pomocou Stirlingovej formule, dostávame ešte lepší výsledok

$$\binom{2m}{m} \sim \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}.$$

Poznámka. Odhady uvedených kombinačných čísel majú zaujímavé súvislosti napr. s teóriu čísel. Jednou z najslávnejších matematických viet je tvrdenie o hustote prvočísel. Ak označíme $\pi(n)$ počet prvočísiel neprevyšujúcich n, potom

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}.$$

Už v minulom storočí dokázal Čebyšev slabšie tvrdenie:

$$\pi(n) = \theta\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

ale práve odhadmi kombinačných čísiel. Čebyšev tiež dokázal Bertrandov postulát, že pre každé prirodzené číslo n existuje prvočíslo p, ktoré spĺňa: $n < p \leq 2n$. Dnes najjednoduchší dôkaz Bertrandovho postulátu je tiež založený na odhadoch kombinačných čísel.

3.8 Zobecnené kombinačné čísla

Kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ má rozumný kombinatorický zmysel, udáva počet rôznych k prvkových podmnožín z n prvkovej množiny ($n \in \mathbb{N}$), t.j. pre $k > n$ platí $\binom{n}{k} = 0$ a ináč

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1},\ 1 \leq k \leq n.$$

Kombinačné čísla majú význam aj inde ako v kombinatorickej interpretácii, preto je snaha rozšíriť definíciu kombinačných čísel pre čo najširšiu triedu.

Definujme pre $r \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \frac{r^{\underline{k}}}{k!} = \frac{r\cdot(r-1)\dots(r-k+1)}{1\cdot 2\dots k}, \text{ak } k \geq 0 \\ 0, \text{ak } k < 0. \end{cases}$$

Takáto definícia môže byť rozšírená aj na $r \in \mathbb{C}$, my ale budeme uvažovať prípad $r \in \mathbb{Z}$.

Poznámka. Pozor na zmeny platnosti všeobecne zaužívaných vlastností kombinačných čísel:

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 0,$$
$$\binom{n}{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n < 0.$$

$n\backslash k$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
6	0	1	6	15	20	15	6	1	0
5	0	1	5	10	10	5	1	0	0
4	0	1	4	6	4	1	0	0	0
3	0	1	3	3	1	0	0	0	0
2	0	1	2	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	
-2	0	1	-2	3	-4	5	-6	7	
-3	0	1	-3	6	-10	15	-21		
-4	0	1	-4	10	-20	35			
-5	0	1	-5	15	-35				

Tabuľka 1: Rozšírený Pascalov trojuholník

Príklad. Spočítame si nejaké kombinačné číslo so zápornými hodnotami:

$$\binom{-1}{3} = -1$$

Zobecnené kombinačné čísla môžme zapisovať do rozšíreného Pascalovho trojuholníka, ako je ukázané v tabuľke 1.

3.9 Kombinatorické identity

Sú známe doslova tisícky rôznych vzťahov a identít pre kombinačné čísla, dokonca sú im venované i celé knihy. My sme sa už zoznámili s nejakými základnými (sčítacia identita, symetrická identita, súčet či alternujúci súčet čísel v riadku Pascalovho trojuholníka).

Príklad. *Hexagonálna vlastnosť.* Vyberte si ľubovoľné číslo v rozšírenom Pascalovom trojuholníku a očíslujme po rade jeho 6 susedov, ktoré ležia v smeroch: SV, V, J, JZ, Z, S. Potom platí, že súčin prvého, tretieho a piateho suseda sa rovná súčinu druhého, štvrtého a šiesteho. (Dokážte si to!)

V ďalšom si rozšírime platnosť spomínaných identít aj pre zobecnené kombinačné čísla a pridáme si niektoré ďalšie a to hlavne tie, ktoré majú pekný kombinatorický dôkaz. Začnime s jednou so základných:

3.9.1 Symetrická identita

Pozor, platí len pre $r \geq 0$, $r, k \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{r}{k} = \binom{r}{r-k}.$$

Dôkaz. Pre $k < 0$ je ľavá strana rovná 0 podľa definície. V čitateli pravej strany je súčin $r\cdot(r-1)\dots(r-(r-k)+1)$, ktorý určite obsahuje 0 a teda pravá strana je tiež rovná 0.

Ak je $k > r \geq 0$, potom v čitateli ľavej strany je súčin $r\cdot(r-1)\dots(r-k+1)$, ktorý určite obsahuje 0 a teda ľavá strana je rovná 0. Dolný koeficent kombinačného čísla na pravej strane je záporný a také kombinačné číslo sa rovná 0 podľa definície.

Pre $0 \leq k \leq r$ rovnosť už v celočíselnom obore bola dokazovaná a dá sa ukázať priamo úpravami kombinačných čísel. □

3.9.2 Absorpčná identita

Pre $k \neq 0$, $k, r \in \mathbb{Z}$ platí:

$$\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1},$$

čo sa niekedy vyjadruje aj v tvare (s platnosťou aj pre $k = 0$):

$$k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}.$$

Dôkaz. Pre $k \leq 0$ binomický koeficent na pravej strane je rovný 0, na ľavej strane pre $k < 0$ tiež, pre $k = 0$ máme súčin s nulou.

Pre $k > 0$ úpravami dostávame:

$$\binom{r}{k} = \frac{r^{\underline{k}}}{k!} = \frac{r \cdot (r-1)^{\underline{k-1}}}{k \cdot (k-1)!} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$$

□

3.9.3 Sčítacia identita

Pre $r, k \in \mathbb{Z}$ platí:

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}.$$

Dôkaz. Pre $k < 0$ podľa definície sú všetky sčítance rovné 0, pre $k = 0$ nerovnosť zrejme platí.

Pre $k > 0$ môžme prevádzať nasledujúce úpravy:

$$\begin{aligned} \frac{(r-1)^{\underline{k}}}{k!} + \frac{(r-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} &= \frac{(r-1)^{\underline{k}} + k(r-1)^{\underline{k-1}}}{k!} \\ = \frac{(r-1)^{\underline{k-1}} \cdot (r-k+k)}{k!} &= \frac{r^{\underline{k}}}{k!} = \binom{r}{k}. \end{aligned}$$

□

3.9.4 Sumácia podľa oboch indexov

Použijeme predchádzajúce vzťahy na získanie ďalších identít s peknou interpretáciou v rozšírenom Pascalovom trojuholníku.

Pre $r, k \in \mathbb{Z}$ úpravami dostávame:

$$\begin{aligned} \binom{r+k+1}{k} &= \binom{r+k}{k} + \binom{r+k}{k-1} \\ &= \binom{r+k}{k} + \binom{r+k-1}{k-1} + \binom{r+k-1}{k-2} \\ &= \binom{r+k}{k} + \binom{r+k-1}{k-1} + \binom{r+k-2}{k-2} + \binom{r+k-2}{k-3} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Ak sa pozrieme na posledný binomický koeficient, zrejme bude existovať nejaká hodnota, od ktorej všetky dolné časti binomických koeficientov budú záporné (a teda binomické keoficienty sú rovné 0).

Dostávame teda:

$$\binom{r+k+1}{k} = \sum_{i \leq k} \binom{r+i}{i}.$$

3.9.5 Sumácia podľa horného indexu

Pre $n, k \geq 0$ úpravami dostávame:

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k+1} &= \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \\ &= \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} \\ &= \binom{n-2}{k+1} + \binom{n-2}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

V takomto prípade nemôžme uvažovať nekonečný súčet ako v predchádzajúcom prípade, lebo všetky členy nebudú nulové, môžme teda sčitovať len pre horný index v binomickom koeficiente nenulový, t.j.

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{0 \leq i \leq n} \binom{i}{k}.$$

Predchádzajúci vzťah má peknú kombinatorickú interpretáciu: vyberáme $(k+1)$-tice z $(n+1)$ prvkovej množiny prvkov $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ a pýtame sa, koľko l-tíc má najväčší prvok m – práve $\binom{m}{k}$, kde $0 \leq m \leq n$.

Poznámka. Špeciálnymi voľbami hodnôt dostávame súčet pre postupnosť za sebou idúcich prirodzených čísel:

$$\binom{0}{1} + \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \cdots + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2}.$$

3.9.6 Všeobecné pravidlo

Pre $r, k \in \mathbb{Z}$ platí nasledujúca rovnosť:

$$\binom{r}{k} = (-1)^k \cdot \binom{k-r-1}{k}.$$

Dôkaz. Pre $k \geq 0$ platí

$$\begin{aligned} r^{\underline{k}} &= r \cdot (r-1) \cdot \ldots (r-k+1) = (-1)^k \cdot (-r) \cdot (-r+1) \cdot \ldots (-r+k-1) \\ &= (-1)^k (-r+k-1)^{\underline{k}} \end{aligned}$$

□

Poznámka. Podľa predchádzajúceho vzťahu sme schopní odvodiť čiastočný alternujúci súčet čísel v Pascalovom trojuholníku.

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq m} \binom{r}{k}(-1)^k &= \sum_{k \leq m} \binom{k-r-1}{k} = \binom{-r-1+m+1}{m} \\ &= \binom{-r+m}{m} = (-1)^m \binom{m+r-m-1}{m} = (-1)^m \binom{r-1}{m}. \end{aligned}$$

3.9.7 Vandermondova konvolúcia

Pre $n_1, n_2, n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n_1}{k} \cdot \binom{n_2}{n-k} = \binom{n_1+n_2}{n}.$$

Pre $n_1 = n_2 = n$ a využitím symetrickej identity môžme horeuvedený vzťah prepísať na tvar:

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Dôkaz. Predpokladajme, že máme n_1 chlapcov a n_2 dievčat. Potom pravá strana nám udáva počet možných n-tíc. Ľavá strana v súčte to isté: každý člen súčtu totiž udáva počet možných výberov pre k chlapcov a $(n-k)$ dievčat. $\square$