# 4 Vytvárajúce funkcie

V nasledujúcom si povieme niečo o jednej veľmi užitočnej výpočtovej technike, ktorá má svoje uplatnenie v kombinatorike, pri rekurentných rovniciach a tiež pri počítaní súm. Základnou myšlienkou je združiť so študovanou nekonečnou postupnosťou reálnych čísel istú spojitú funkciu, tzv. vytvárajúcu funkciu tejto postupnosti. Úlohy o postupnostiach je potom možné riešiť využitím rôznych operácií s funkciami a znalosťami o funkciách. Takýto prechod je veľmi nesamozrejmý a mnohé aplikácie vytvárajúcich funkcií sú pozoruhodné.

**Definition 4.1** *Mocninou radou budeme rozumieť nekonečnú radu tvaru $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, kde $a_0$, $a_1$, $a_2$, $\dots$ sú reálne čísla a $x$ je premenná, ktorá nadobúda reálnych (komplexných) hodnôt. Uvedenú mocninú radu budeme spravidla označovať $a(x)$.*

Jednoduchým príkladom mocninnej rady je

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots \tag{4.1}$$

Zo vzorca pre súčet geometrickej rady vieme, že pre každé $x \in (-1, 1)$ táto rada konverguje a jej súčet je rovný $\frac{1}{1-x}$. V uvedenom zmysle rada (4.1) určuje funkciu $\frac{1}{1-x}$. Obrátene, uvedená funkcia v sebe naopak obsahuje celú informáciu o rade (4.1), pretože koeficienty rady sú práve koeficienty Taylorovho rozvoja funkcie $\frac{1}{1-x}$ v bode 0. Takáto zámena nekonečnej postupnosti čísiel na funkciu a späť je kľúčovým obratom v technike vytvárajúcich funkcií.

Nasledujúce tvrdenie hovorí, že ak nerastú členy postupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ príliš rýchlo, definuje príslušná nekonečná rada $a(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$ skutočne funkciu reálnej premennej $x$ (aspoň na malom okolí 0) a zo znalosti hodnôt tejto funkcie môžeme postupnosť $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ naspäť rekonštruovať.

**Lemma 4.1** *Buď $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ postupnosť reálnych čísel a predpokladajme, že pre nejaké číslo $L$ platí $|a_k| \le L^k$ pre všetky $k \ge 1$, Potom pre každé $x \in \left(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right)$ rada $a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i$ konverguje (dokonca absolútne) a hodnota jej súčtu definuje teda funkciu premennej $x$ na uvedenom intervale; túto funkciu budeme označovať tiež $a(x)$. Hodnotami funkcie $a(x)$ na ľubovoľnom malom okolí 0 sú všetky členy postupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ jednoznačne určené: funkcia $a(x)$ má totiž v bode 0 deriváciu všetkých rádov a pre $n = 0, 1, 2, \dots$ platí*

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!},$$

*kde $a^{(n)}(0)$ značí $n$-tú deriváciu funkcie $a(x)$ v bode 0.*

Dôkaz vyplýva zo znalostí analýzy a nebude preberaný v tomto kurze.

**Definition 4.2** *Nech $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je postupnosť reálnych čísiel. Ak mocninná rada*

$$a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

*konverguje v istom obore k funkcii $f(x)$, nazývame túto funkciu obyčajnou vytvárajúcou funkciou postupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$.*

*Ak má postupnosť $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ len konečne mnoho nenulových členov, jej vytvárajúcou funkciou je mnohočlen.*

Obyčajné vytvárajúce funkcie sú vhodné na počítanie kombinácií s opakovaním s nejakými okrajovými podmienkami, súm alebo rekurencií. V nasledujúcom si ukážeme ich použitie pri výpočte kombinácií s opakovaní,

Motivačný príklad po obede:

**Príklad.** V cukrárni majú 4 druhy zákuskov, pričom z každého už len obmedzený počet: 6 kremrolí, 7 punčových rezov, 5 špicov a 10 vetrníkov. Koľkými spôsobmi môžme vybrať 8 zákuskov ak počet vetrníkov musí byť párny a určite nechceme aby vo výbere boli práve štyri špice?



Ako vynásobiť mnohočleny $p(x) = x + x^2 + x^3 + x^4$ a $q(x) = x + x^3 + x^4$ Napríklad podľa tohto jednoduchého pravidla: vynásobíme každý člen z $p(x)$ každým členom z $q(x)$ a všetky tieto členy sčítame tak, že súčiny s rovnakými mocninami $x$ zlúčime. Súčin takto vyjde: $x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2$.

Pýtajme sa teraz ináč: vyberieme si nejakú mocninu $x$, napríklad $x^5$ a chceme vedieť, aký bude jej koeficient v súčine bez toho, aby sme celý súčin počítali. Člen s $x^5$ sa v súčine môže objaviť vynásobením nejakého člena $x^i$ z $p(x)$ členom $x^{5-i}$ z $q(x)$. Koeficient pri $x^5$ v súčine bude teda práve počet spôsobov, ktorými sa dá vyhovujúce $i$ zvoliť. Presnejšie povedané, koeficient pri $x^5$ bude počet dvojíc $(i, j)$, kde $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (množina exponentov mnohočlenu $p(x)$), $j \in \{1, 3, 4\}$ (exponenty v $q(x)$) a pritom $i+j = 5$.

To, čo sme si práve povedali, vyjadrime trochu obecnejšie: nech $I$, $J$ sú konečné množiny prirodzených čísel. Utvorme mnohočleny

$$p(x) = \sum_{i\in I} x^i, \qquad q(x) = \sum_{j\in J} x^j.$$

Potom pre každé prirodzené číslo $r$, počet riešení $(i, j)$ rovnice

$$i + j = r$$

spĺňajúcich $i \in I$, $j \in J$ je rovný koeficientu pri $x^r$ v súčine $p(x)q(x)$.

**Príklad.** Koľkými spôsobmi môžme zaplatiť čiastku 21 korún, ak máme 6 korunových mincí, 5 dvojkorún a 4 päťkoruny.

Hľadaný počet je zrejme rovný počtu riešení rovnice

$$i_1 + i_2 + i_3 = 21,$$

kde $i_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $i_2 \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $i_3 \in \{0, 5, 10, 15, 20\}$.

Tentokrát vidíme, že počet riešení tejto rovnice je rovný koeficientu pri $x^{21}$ v súčine:

$$(1 + x + x^2+x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}) \\ \times (1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20})$$

Člen s $x^{21}$ totiž dostávame tak, že vezmeme nejaký člen $x^{i_1}$ z prvej zátvorky, nejaký člen $x^{i_2}$ z druhej zátvorky a $x^{i_3}$ z tretej zátvorky, pričom $i_1 + i_2 + i_3 = 21$. Každý taký možný výber prispeje 1 k uvažovanému koeficientu.

Hľadaný počet môžeme samozrejme nájsť aj prebraním všetkých možností. Uvedený postup je však predohra k zložitejším metódam.

**Veta 4.1** *Majme $k$ druhov prvkov. Pre $1 \le i \le k$ a $j \ge 0$ nech $a_{i,j} = 1$ ak sa prvok $i$-teho druhu môže vyskytovať vo výbere práve $j$-krát a $a_{i,j} = 0$ inak. Potom počet povolených výberov $n$ prvkov sa rovná koeficientu pri $x^n$ v súčine $\prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}x^j\right)$.*

**Dôkaz.** V uvedenom súčine môžeme $x^n$ dostať toľkými spôsobmi, koľkými možno povyberať zo zátvoriek nenulové hodnoty $a_{i,j}x^j$ tak, aby sa súčet mocnín $x^j$ rovnal $n$. Každému takému výberu $1 \cdot x^{j_1}$, $1 \cdot x^{j_2}$, $\dots$, $1 \cdot x^{j_k}$ odpovedá povolený výber $j_1$ prvkov prvého druhu, $j_2$ prvkov druhého druhu, $\dots$, $j_k$ prvkov $k$-teho druhu. Keďže $1 \cdot x^{j_1} \cdot 1 \cdot x^{j_2} \cdot \ldots x^{j_k} = 1 \cdot x^n$, tak každý povolený výber prispieva ku koeficientu pri $x^n$ jednotkou, a preto sa počet povolených výberov $n$ prvkov rovná koeficientu pri $x^n$. □

**Poznámka.** [Kombinatorický význam binomickej vety] Binomická veta tvrdí, že pre $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{C}$:

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n. \tag{4.2}$$

Na ľavej strane máme súčin $n$ mnohočlenov, každý z nich je $1 + x$. Podľa vyššie uvedeného, koeficient pri $x^r$ po roznásobení bude počet riešení rovnice

$$i_1 + i_2 + \dots + i_n = r,$$

kde $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{0, 1\}$. Ale každé riešenie takej rovnice znamená vybrať $r$ premenných medzi $i_1, i_2, \dots, i_n$, ktoré budú rovné 1 — ostatné budú rovné 0. Takých výberov je presne rovnako ako $r$-prvkových podmnožín $n$ prvkovej množiny, teda $\binom{n}{r}$. To znamená, že koeficient pri $x^n$ v mnohočlene $(1 + x)^r$ je $\binom{n}{r}$.

**Príklad.** Platí rovnosť
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Tento vzťah môžme odvodiť derivovaním oboch strán vzorca (4.2) ako funkcie premennej $x$. Na oboch stranách musí samozrejme výjsť ten istý mnohočlen. Derivovaním ľavej strany dostaneme $n(1+x)^{n-1}$, derivovaním pravej strany člen po člene obdržíme $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$. Dosadením $x=1$ vznikne požadovaná rovnosť.

Príklad iného typu je založený na rovnosti koeficientov v dvoch vyjadreniach toho istého mnohočlena. Ukážeme si iný dôkaz známeho tvrdenia:

**Príklad.** Uvažujme identitu
$$(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}.$$
Koeficient pri $x^n$ na pravej strane je $\binom{2n}{n}$. Na ľavej strane môžeme rozvinúť obe mocniny $(1+x)^n$ podľa binomickej vety a potom násobiť vzniknuté dva mnohočleny. Koeficient pri $x^n$ v ich súčine môžeme vyjadriť ako
$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0},$$
a to musí byť to isté ako koeficient na pravej strane, t.j.
$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Pozrime sa, ako vyzerajú vytvárajúce funkcie pre nejaké postupnosti:

$$(1,1,1,\dots) \rightsquigarrow \frac{1}{1-x},$$
$$(1,2,3,\dots) \rightsquigarrow \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{derivovaním predchádzajúceho: } \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = (1-x)^2$$
$$(0,1,2,3,\dots) \rightsquigarrow \frac{x}{(1-x)^2}$$
$$(0,0,2,\dots,n(n-1),\dots) \rightsquigarrow \frac{2x^2}{(1-x)^3}, \quad \text{derivovaním predchádzajúceho: } \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^{-3}}$$
$$(1,-1,1,\dots) \rightsquigarrow \frac{1}{1+x}$$

**Veta 4.2 (Zobecnená binomická veta)** *Pre ľubovoľné reálne číslo $x$ a nezáporné celé číslo $r$ je funkcia $(1+x)^r$ vytvárajúca funkcia pre postupnosť $(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \dots)$, pričom mocninná rada $\binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \dots$ vždy konverguje pre $|x| < 1$.*

Dôkaz je záležitosťou matematickej analýzy.

Pre celé záporné $r$ môžeme binomický koeficient $\binom{r}{k}$ upraviť na $(-1)^k\binom{-r+k-1}{k} = (-1)^k\binom{-r+k-1}{-r-1}$. Takže pre celé záporné mocniny špeciálne dostaneme:
$$\frac{1}{(1-x)^n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1}x + \binom{n+1}{n-1}x^2 + \cdots + \binom{n+k-1}{n-1}x^k + \dots$$

**Príklad.** V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bielych loptičiek, loptičky tej istej farby sú nerozoznateľné. Koľkými spôsobmi môžme z danej krabice vybrať 70 loptičiek?



Zrejme hľadaný počet je rovný koeficientu pri $x^{70}$ v súčine:
$$\begin{aligned}&(1+x+x^2+\cdots+x^{30})(1+x+x^2+\cdots+x^{40})(1+x+x^2+\cdots+x^{50})\\
&= \frac{1-x^{31}}{1-x}\frac{1-x^{41}}{1-x}\frac{1-x^{51}}{1-x}\\
&= \frac{1}{(1-x)^3}(1-x^{31})(1-x^{41})(1-x^{51})\\
&= \left(\binom{2}{2} + \binom{3}{2}x + \binom{4}{2}x^2 + \dots\right)(1-x^{31}-x^{41}-x^{51}+\dots)\end{aligned}$$

Koeficient pri $x^{70}$ v tomto súčine bude:
$$\binom{70+2}{2} - \binom{70+2-31}{2} - \binom{70+2-41}{2} - \binom{70+2-51}{2} = 1061.$$

**Príklad.** Na pošte majú tri druhy známok. Známky prvých dvoch druhov sú za 1 korunu a známky tretieho druhu sú za 2 koruny. Koľkými spôsobmi možno nakúpiť známky za $n$ korún?

Podľa predchádzajúcej teórie počet výberov pre $n$ korún sa rovná koeficientu pri $x^n$ v súčine:
$$(1+x+x^2+x^3+\dots)^2(1+x^2+x^4+x^6+\dots) =$$
$$\frac{1}{(1-x)^2}\cdot\frac{1}{(1-x^2)} = \frac{1}{(1-x)^3}\cdot\frac{1}{1+x}$$

Tento výraz upravme na tvar:
$$\frac{1}{(1-x)^3}\cdot\frac{1}{(1+x)} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{Bx}{(1-x)^2} + \frac{2Cx^2}{(1-x)^3} + \frac{D}{(1+x)}.$$

Riešením dostaneme koeficienty: $A = \frac{7}{8}$, $B = \frac{10}{8}$, $C = \frac{2}{8}$, $D = \frac{1}{8}$ a použitím mocniných rád:
$$\frac{1}{(1-x)^3}\cdot\frac{1}{(1+x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{7}{8} + \frac{10}{8}n + \frac{2}{8}n^2 - \frac{2}{8}n + \frac{1}{8}(-1)^n\right)x^n$$

Čiže známky za $n$ korún môžeme vybrať $\frac{1}{4}n^2 + n + \frac{7}{8} + \frac{1}{8}(-1)^n$ spôsobmi.