Kapitola 1: Rekurentné problémy

Príklad 1.1. Riešte Hanojské veže s obmedzením, že sa nemôžu prenášať priamo disky z A na B a z B na A, t.j. každý ťah musí byť buď z tyče alebo na tyč C. Nájsť najkratšiu postupnosť ťahov, ktorou prenesieme vežu z A na B. (Rekurentný vzťah a jeho riešenie.)

Príklad 1.2. Ukážte, že pri prenášaní diskov podľa predchádzajúcej úlohy budú dosiahnuté všetky možné konfigurácie rozostavania n diskov na 3 tyčiach.

Príklad 1.3. Dvojitá Hanojská veža má z disku každej veľkosti dva kusy. Pravidlá prenášania sú rovnaké ako v pôvodnom hlavolame, navyše môžme položiť na seba aj dva disky rovnakej veľkosti. Aký je minimálny počet presunov potrebný na prenesenie veže z A na B a) ak sú disky rovnakej veľkosti nerozlíšiteľné, b) ak sú rozlíšiteľné.

Príklad 1.4. Riešte rekurentnú rovnicu: $Q_0 = \alpha$, $Q_1 = \beta$, $Q_n = (1 + Q_{n-1})/Q_{n-2}$ pre $n > 1$. Predpokladáme, že $Q_n \neq 0$ pre všetky $n \geq 0$.

Príklad 1.5. Aký je maximálny počet L_n oblastí určených n priamkami v rovine?

Príklad 1.6. Pri Vennových diagramoch 3 kružnice môžu ohraničovať 8 rôznych oblastí. Môžu 4 kružnice ohraničovať 16 rôznych oblastí?

Príklad 1.7. Niekedy je možné použiť indukciu späť dokázaním, že z n vyplýva $n-1$ a naopak. Napríklad, uvažujme tvrdenie

$$P(n) : x_1 \ldots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n, \text{ if } x_1, \ldots, x_n \geq 0.$$

Je to zrejme pravda pre $n = 2$.

a) Dokážte, že $P(n)$ implikuje $P(n-1)$ pre $n > 1$ voľbou $x_n = (x_1 + \cdots + x_{n-1})/(n-1)$.
b) Ukážte, že $P(n)$ a $P(2)$ implikuje $P(2n)$.
c) Vysvetlite, prečo toto všetko implikuje, že $P(n)$ platí pre všetky n.

Príklad 1.8. Na aký najväčší počet oblastí môžme rozdeliť rovinu n (ostrouhlými) výsekmi.

Príklad 1.9. Koľko najviac je ohraničených oblastí v rovine, ktoré dostaneme umiestnením n priamok v rovine?

Príklad 1.10. Nech $H_n = J_{n+1} - J_n$, kde J_n odpovedá značeniu podľa Jozefovej úlohy. Z rovníc pre J_n dostávame $H(2n) = 2$ a $H(2n+1) = 2H(n) - 2$, pre všetky $n \geq 1$. To teda vyzerá, že sme schopní dokázať $H(n) = 2$ pre všetky n, indukciou podľa n. Kde je chyba?

Príklad 1.11. Majme dané reálne čísla a_0, a_1, $\ldots$, a_n. Koľkými spôsobmi môžeme zapísať ich súčin (rôzne spôsoby uzátvorkovania a poradia činiteľov)?

Príklad 1.12. Odvoďte v Jozefovej úlohe vzťah pre predposledného vypadávajúceho.

Príklad 1.13. Riešte nasledujúce rekurentné rovnice a urobte skúšku správnosti: $u_n + u_{n-1} - u_{n-2} - u_{n-3} = 0$ pre $n \geq 3$ s inicializačnými podmienkami $u_0 = 0$, $u_1 = -3$, $u_2 = 2$.

Príklad 1.14. $u_n + 2u_{n-1} - 11u_{n-2} - 12u_{n-3} + 36u_{n-4} = 0$ pre $n \geq 4$ s inicializačnými podmienkami $u_0 = 2$, $u_1 = -9$, $u_2 = 41$, $u_3 = -205$.

Príklad 1.15. $u_n - 2u_{n-1} - 5u_{n-2} + 6u_{n-3} = 0$ pre $n \geq 3$ s inicializačnými podmienkami $u_0 = 3$, $u_1 = -1$, $u_2 = 17$.

Príklad 1.16. $f(1) = 2$, $f(2n) = 2f(n) + 2$, $f(2n+1) = 2f(n) + 2$ pre $n \geq 1$.

Príklad 1.17. $T(1) = 1$, $T(n) = 2T(n-1) + n$ pre $n \geq 2$.

Príklad 1.18. Koľko slov dĺžky n zložených z troch písmen a, b, c neobsahuje dvojicu bezprostredne za sebou nasledujúcich a?

Príklad 1.19. Koľko postupností dĺžky n zložených z núl a jedničiek neobsahuje žiadne dve jednotky bezprostredne za sebou?

Príklad 1.20. Riešte rekurenciu: $T_0 = 5$, $2T_n = nT_{n-1} + 3n!$

Príklad 1.21. Riešte rekurenciu: $3T_n = 4T_{n-1} + 6$, $T_0 = 0$.