Materiál na štátnicu

Diskrétna matematika

Verzia 1

Obsah.

3. Diskrétna matematika.

3.1. Základy kombinatoriky.

3.1.1. Základné pojmy.

Lema 3.1.1.1 (Pravidlo súčtu).

Nech A_1 .. A_n sú disjunktné. Potom $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$.

Dôkaz.

Triviálne.

Lema 3.1.1.2 (Pravidlo súčinu).

$\forall A_1..A_n$: $|A_1 \times .. \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$.

Dôkaz.

Triviálne.

Lema 3.1.1.3 (Pravidlo mocniny).

$\forall A,B$ je počet zobrazení $f : A \rightarrow B$ rovný $|B|^{|A|}$.

Dôkaz.

Pre každý prvok A môžme vybrať jeho obraz spomedzi prvkov B.

Definícia.

Zobrazenie $v : B \rightarrow \{1..n\}$ sa nazýva *variácia s opakovaním* n-tej triedy prvkov B. Triedu variácií s opakovaním označujeme $\mathbf{V}'_n$.

Označenie.

Množinu injektívnych zobrazení z A do b označíme I_B^A.

Lema 3.1.1.4.

Nech $|A| = n$ a $|B| = m$. Potom $|I_B^A| = \prod_{k=0}^{n-1} n-k$.

Dôkaz.

Obraz prvého prvku A vyberáme z n prvkov, druhého spomedzi n-1, ...

Dôsledok 3.1.1.1.

$|I_B^A|$=0 $\Leftrightarrow$ $|A| > |B|$.

Dôkaz.

Triviálne.

Definícia.

Zobrazenia $v \in I_{\{1..n\}}^A$ nazývame *variácie* n-tej triedy z prvkov A. Triedu variácií n-tej triedy označujeme $\mathbf{V}_n$.

Definícia.

Ak $|A| = n$, tak $\mathbf{V}_n$ na A nazývame *permutácie* na A a označujeme $\mathbf{P}_n$.

Lema 3.1.1.5.

Počet usporiadaní n-prvkovej množiny je $n!$.

Dôkaz.

Triviálne.

3.1.2. Relácia ekvivalencie.

Definícia.

φ je *relácia ekvivalencie* n A, ak

- $\forall x \in A : (x,x) \in \varphi$ (reflexívnosť)
- $\forall x,y \in A : (x,y) \in \varphi \Leftrightarrow (y,x) \in \varphi$ (symetrickosť)
- $\forall x,y,z \in A : (x,y) \in \varphi \wedge (y,x) \in \varphi \Rightarrow (x,z) \in \varphi$ (tranzitívnosť).

$(x,y) \in \varphi$ označujeme $x \sim y$.

Lema 3.1.2.1.

Každá relácia ekvivalencie tvorí rozklad množiny na triedy ekvivalencie.

Dôkaz.

Triviálne.

Definícia.

Ak $P(B)$ je množina podmnožín A, tak množinu $C_k(A) = \{B \in P(A);\ |B| = k\}$ nazývame *kombinácie* k-tej triedy nad A. $|C_k(A)|$ je *kombinačné číslo*, ktoré zapisujeme $\binom{n}{k}$.

Veta 3.1.2.1.

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{n-1} n-j\ .$$

Dôkaz.

Triviálne.

Veta 3.1.2.2.

Mohutnosť podmnožín každej množiny A je $2^{|A|}$.

Dôkaz.

Každý prvok je alebo nie je v danej podmnožine.

3.1.3. Základné kombinatorické identity.

Veta 3.1.3.1.

Nech k, n, n_1, $n_2 \in N$. Potom

1. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-k}{k}$
3. $n < k \Rightarrow \binom{n}{k} = 0$
4. $\sum_{i=0}^{k}\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i} = \binom{n_1+n_2}{k}$
5. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
6. $\forall x \in R : (1+x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$
7. $\sum_{i=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$
8. $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = 0.$

Dôkaz.

Zrejmé.

Lema 3.1.3.1.

Nech A je množina a $k \in N$. Ak φ je taká relácia na $\mathbf{V}_k{}'(A)$, že $\forall f,g : \{1..n\} \to A : (f,g) \in \varphi \Leftrightarrow \forall x \in A : |f^{-1}(x)| = |g^{-1}(x)|$, tak φ je relácia ekvivalencie.

Dôkaz.

Triviálne.

Definícia.

Triedy rozkladu relácie φ z lemy 3.1.3.1 nazývame *kombinácie s opakovaním* k-tej triedy na množine A. Množinu kombinácií s opakovaním k-tej triedy na A označujeme $C_k{}'(A)$.

Veta 3.1.3.2.

$|C_k{}'(A)|$ = # funkcií $f : A \to \{1..|A|\}$, pre ktoré $\sum_{a\in A} \left| f^{-1}(a) \right| = k$.

Dôkaz.

Triviálne.

Veta 3.1.3.3.

$|C_k{}'(A)| = \binom{n-k+1}{k}$, kde n je mohutnosť A.

Dôkaz.

Ka d d z r lú h r t ť, v t r ly dd ľ ú d t t d t , r t d t v i-tej podpostupnosti je rovný po t opakovaní i-teho prvku z A v kombinácii. Dĺ t t n-k+1, z h r v n jednotiek. Po t r t ý h t t t h t tv r r v $\binom{n-k+1}{k}$.

Veta 3.1.3.4.

Nech A,B sú mno y, $|A| = n$, $|B| = k$, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, $A = \{a_1, .. , a_n\}$, $B = \{b_1, .. , b_k\}$. Ozna $P_{n_1 \wedge n_k}$ po t t ý h rjekcií $f : A \to B$, $\forall i \in 1..k : |f^{-1}(b_i)| = n_i$. Potom $P_{n_1 \wedge n_k} = \dfrac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$.

Dôkaz.

Ak $n = k$, tak sú to permutácie a $\forall i \in 1..n : n_i = 1$. Tých je práve $n!$. Ak $n > k$, tak tento po t tr d l ť r t v d n_i (všetky permutácie ur ú r v ú r).

Veta 3.1.3.5.

Nech $|A| = k.d$. Ozna ρ_d po t r z l d v A na d-prvkové mno y. P t $|\rho_d| = \dfrac{(k.d)!}{k!(d!)^k}$.

Dôkaz.

Ka d t ť tr d t éh t r z l d r r $A \to B$ takú, $\forall i \in 1..k$: $|f^{-1}(b_i)| = n_i$. Podľ v ty 3.1.3.4 je týchto surjekcií $\frac{(k.d)!}{\underbrace{d!.d!}_{k}}$. Toto l tr št vyd l ť permutáciami na triedach rozkladu, ktorých je $k!$.

3.1.4. Polynomická veta.

Veta 3.1.4.1 (Polynomická veta).

Nech $m,n \in N$, $x_1, .. , x_n \in C$. Potom $(x_1, .. , x_n)^n = \sum_{(n_1,\dots,n_m)\in\left\{(n_1,\dots,n_m);\sum_{i=1}^{m} a_i=n\right\}} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{m} n_i!} \prod_{i=1}^{m} x_i^{n_i}$.

Dôkaz.

$(x_1, .. , x_n)^n = \underbrace{(x_1 \cdot\cdot x_m)\cdot\cdot(x_1 \cdot\cdot x_m)}_{n}$. Po roznásobení dostáveme $\prod_{i=1}^{m} x_i^{n_i}$, pri x_1 vyberáme $\binom{n}{n_1}$ spôsobmi, x_2 $\binom{n-n_1}{n_2}$ spôsobmi, atď. S $\frac{n!}{\prod_{i=1}^{m} n_i!}$, pri $\sum_{i=1}^{m} n_i$ musí byť n. Priamo ô .

Veta 3.1.4.2.

Po , $(x_1, .. , x_n)$, kde $\forall i \in 1..n$ je k_i po í i, je $\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} i^{k_i} k_i}$.

Dôkaz.

$n!$ je po , $k_i!$ - poradie cyklov, i^{k_i} - rota k_i cykloch.

3.2. Logicko - kombinatorické metódy.

3.2.1. Princíp vypojenia a zapojenia.

Veta 3.2.1.1.

Nech M_1 .. M_n sú kone . $\forall k \in 1..n$: $S_k = \sum_{1\le i_1 \le \dots \le i_k} \left| \bigcap_{j=1}^{k} M_{i_j} \right|$. Potom $\left| \bigcup_{i=1}^{n} M_i \right| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} S_i$.

Dôkaz.

Nech $x \in \bigcup_{i=1}^{n} M_i$ patrí do m mno K ľ x zarátaný do $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} S_i$? Do S_1 m-krát, do S_i $\binom{m}{i}$-krát, do $\sum_{i=1}^{n} S_i$ 2^m-krát a teda do $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} S_i$ $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{m}{i}$ = 1-krát. Tým je tvrdenie dokázané.

Veta 3.2.1.2.

Nech S_B^A je mno A do B, $|A|=m$ a $B = \{b_1, .., b_n\}$. Potom $\left|S_B^A\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$

Dôkaz.

Od všetkých odpo O $M(k)$ mno f A do B, ktoré A nezobrazia na b_k. Je zrejmé, $M(i_1, .. , i_k)| = (n - k)^m$. Potom $S_k = \binom{n}{k}.(n - k)^m$

a pou f

Označenie.

Pre systém mno M_1 .. M_n budeme $M(r)$ ozna ť
patria práve do r mno $M´(r)$ po ň r mno

Veta 3.2.1.3.

Nech M_1 .. M_n sú kone $M(r) = \sum_{k=r}^{n}(-1^{k-r}\binom{k}{r}S_k$, kde $S_k = \sum_{1\le i_1\le\Lambda\le i_k}\left|\mathrm{I}_{j=1}^{k} M_{i_j}\right|$.

Dôkaz.

Prvok z r mno 1 ľ 2 1 1
ť
x patrí do $s > r$ mno x dáva vklad
$\sum_{k=r}^{n}(-1^{k-r}\binom{k}{r}\binom{s}{k}$, pri $\binom{k}{r}\binom{s}{k} = \frac{k!}{(k-r)!r!}\cdot\frac{s!}{(s-k)!k!} = \frac{s!}{(s-r)!r!}\cdot\frac{(s-r)!}{(s-k)!(k-r)!} = \binom{s}{r}\binom{s-r}{k-r}$, tak $\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}\binom{s}{k} = \sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{s}{r}\binom{s-r}{k-r} = \binom{s}{r}\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{s-r}{k-r} =$ (j = k-r) $= \binom{s}{r}\sum_{j=0}^{s-r}(-1)^j\binom{s-r}{j} = 0$ podľ 1 1 7

Veta 3.2.1.4.

Nech M_1 .. M_n sú kone $M´(r) = \sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k-1}{r-1}S_k$, kde $S_k = \sum_{1\le i_1\le\Lambda\le i_k}\left|\mathrm{I}_{j=1}^{k} M_{i_j}\right|$.

Dôkaz.

$M´(r) = \sum_{i=r}^{n} M(i) = \sum_{i=r}^{n}\sum_{k=i}^{n}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}S_k = \sum_{k=i}^{n} S_k\sum_{i=r}^{n}(-1)^{k-i}\binom{k}{i} =$ (j=k-i) $=$ $\sum_{k=i}^{n} S_k\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j\binom{k}{k-j} = \sum_{k=i}^{n} S_k\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j\binom{k}{j} = \sum_{k=i}^{n} S_k\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j\left[\binom{k-1}{j}+\binom{k-1}{j-1}\right] =$ $\sum_{k=i}^{n} S_k(-1)^{n-i}\binom{n-1}{i-1}$.

3.2.2. Spernerova veta.

Veta 3.2.2.1.

Nech A_1 .. A_n sú podmnožiny A, z ktorých žiadna nie je podmnožinou inej. Potom $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\binom{|A|}{|A_i|}} \leq 1$.

Dôkaz.

Uvažujme reťazec $\emptyset = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_m = A$, kde $|A| = m$. Takýchto reťazcov existuje $m!$ (každý reťazec určuje permutáciu A). Ak $\exists i \in 1..m\ \exists j \in 1..n : C_i = A_j$, hovoríme, že reťazec *prechádza* množinou A_j. Zároveň keďže A_1 .. A_n sú do seba nezapadajúce, žiadny reťazec neprechádza viac ako jednou z nich. Ak $|A_j| = r_j$, tak množinou A_j prechádza $r_j!(n-r_j)!$ reťazcov ($r_j!$ vchádza a $(n-r_j)!$ vychádza). Ale suma reťazcov, prechádzajúcich cez množiny A_1 .. A_n musí byť menšia ako $m!$, takže $\sum_{i=1}^{n} \frac{m!}{\binom{m}{r_i}} \leq m!$, čo tvrdenie dokazuje.

Veta 3.2.2.2 (Sperner).

Nech $|A| = n$ a A_1 .. A_m sú konečné neprázdne podmnožiny A, z ktorých žiadna nie je podmnožinou inej. Potom $m \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Dôkaz.

Stačí pre $i \in 1..n$ odhadnúť $|A_i| \approx \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ a použiť predchádzajúcu vetu. $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = \frac{m}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

3.2.3. Dirichletov princíp.

Veta 3.2.3.1.

Nech A,B sú množiny a $f : A \to B$ zobrazenie. Ak $|A| > |B|$, tak $\exists x,y \in A : f(x) = f(y)$.

Dôkaz.

Triviálne.

Dôsledok 3.2.3.1.

Nech A,B sú množiny a $f : A \to B$ zobrazenie. Ak $|A| > k.|B|$, tak $\exists x_1..x_{k+1} \in A\ \forall i,j \in 1..k+1 : f(x_i) = f(x_j)$.

Dôkaz.

Triviálne.

Dôsledok 3.2.3.2.

Nech A,B sú množiny a $f : A \to B$ zobrazenie. Ak A je nekonečná a B je konečná, tak $\exists y \in B : f^{-1}(y) = \{x \in A; f(x) = y\}$ je nekonečná.

Dôkaz.

Triviálne.

3.3. Grafy.

3.3.1. Kőnigova lema.

Lema 3.3.1.1 (König).

V kaž o n kon čno st o s kon čn a i álny st ňo t nia ist n kon čná t a.

Dôkaz.

Triviálne.

Veta 3.3.1.1.

Nech strom T má maximálny stupeň vetvenia k. Ak $|T| > \sum_{i=0}^{n-1} k^i$, tak existuje vetva dĺžky as oň n+1.

Dôkaz.

Úplný k-árny strom hĺbky n má $\sum_{i=0}^{n-1} k^i$ vrcholov.

3.3.2. Ramseyove císla.

Definícia.

Ramseyovým číslom pre m a n nazývame číslo $R(m, n) = \min\{k \in N;\ \forall G : |G| \geq k \Rightarrow G$ má m-kliku alebo G'má n-kliku$\}$.

Veta 3.3.2.1.

$\forall 2<m,n \in N : R(m, n) \leq R(m, n - 1) + R(m - 1, n)$.

Dôkaz.

Indukciou na $m+n$. $2 = R(2,2) \leq R(1,2) + R(2,1) = 1 + 1$. Majme teraz G o aspoň $R(m - 1, n) + R(m, n - 1)$ vrcholoch. Nech $v \in G$. Ak $deg_G(v) \geq R(m - 1, n)$, tak buď $G[N(v)]$ alebo $(G[N(v)])'$ má m-1-kliku. Spolu s v je to m-klika. Ak $deg_G(v) < R(m - 1, n)$, tak $deg_{G'}(v) \geq R(m, n - 1)$ a postupujeme vyššieuvedeným spôsobom.

Veta 3.3.2.2.

$\forall m,n \geq 2 : R(m, n) \leq \binom{m+n-2}{n-}$.

Dôkaz.

1° $R(m, 2) = 2 \leq \binom{m}{1} = m$. Rovnako $R(2, n) = 2 \leq \binom{n}{n-1} = n$.

2° Podľ 3 3 2 1 $R(m, n) \leq R(m, n - 1) + R(m - 1, n) \leq \binom{m+n-3}{n-2} + \binom{m+n-3}{n-1} = \binom{m+n-2}{n-1}$.

Veta 3.3.2.3 (Ramsey).

$\forall m,n \geq 2\ \forall r \geq R(m, n)$ $\forall$rozklady $\binom{r}{2}$ na R_1 a R_2 buď R_1 obsahuje všetky $\binom{m}{2}$ alebo R_2 všetky $\binom{n}{2}$.

Dôkaz.

Veta je iba preformulovaním definície Ramseyových čísel.

3.3.3. Systémy reprezentantov množín.

Definícia.

Nech $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$. Vektor $(a_1, .. , a_n)$, kde $\forall i \in 1..n : a_i \in S_i$ nazývame *systém reprezentantov* mno ín $S_1, .. , S_n$, ak $\forall i \neq j \in 1..n : a_i \neq a_j$.

Veta 3.3.3.1 (Hall).

Nech $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$. Potom na S existuje systém reprezentantov práve vtedy, keď $\forall k \in 1..n$ $\forall i_1..i_k \in 1..n : \left|\bigcup_{j=1}^{k} S_{i_j}\right| \geq k$.

Dôkaz.

Uva ujme bipartitný graf G s partíciami $A = \{ S_1, .. , S_n)$ a $B = \{x \in S\}$. Na S existuje systém reprezentantov práve vtedy, keď na G existuje párenie pokrývajúce partíciu A. Ale podľa vety 5.2.2. (in formul cia Hallovej vety) takéto p renie e istuje pr ve vtedy, keď $\forall M \subseteq A\ |N(M)| \geq |M|$, čo je ekvivalentné n šmu tvrdeniu.

Definícia.

Stĺpce a riadky bin rnej matice nazývame *línie*.

Veta 3.3.3.2 (König).

Maximálny počet nez vislých jednotiek ka dej bin rnej matice je rovný minim lnemu počtu línií, ktoré maticu pokrývajú.

Dôkaz.

Túto vetu sme (podobne ako predchádzajúcu) dokázali v jej grafovej podobe ako vetu 5.2.2.2 teórie grafov. Skutočne ka dú bin rnu maticu mo no reprezentovať bipartitným grafom, kde partíciu A budú tvoriť riadky matice a B jej stĺpce, hrany budú medzi líniami, ktoré sa kri ujú v jednotke. önigova veta v tejto podobe hovorí, e mohutnosť ma im lneho párenia bipartitného grafu je rovná mohutnosti jeho minimálneho vrcholového pokrytia. Párenie grafu pritom jednoznačne určuje množinu nezávislých jednotiek matice, zatiaľ čo vrcholov pokr tie množinu l ni , takže tvrdenie plat

3.3.4. Partície.

Definícia.

Čísla $a_1..a_n$ nazývame *partícia* čísla $a \in Z^+$, ak $\sum_{i=1}^{n} a_i = a$. Číslom $p(n, k)$ označíme počet usporiadaných partícií čísla n o k sčítancoch. $p(n)$ bude potom celkový počet usporiadaných partícií čísla n. Podobne číslom $p'(n, k)$ označíme počet neusporiadaných partícií čísla n o k členoch a $p'(n)$ bude označovať celkový počet neusporiadaných partícií čísla n.

Lema 3.3.4.1.

$\forall n \in Z^+\ \forall k \in N : p(n, k) = \binom{n-1}{k-1}$.

Dôkaz.

Majme n za sebou idúcich jednotiek. Vlo k-1 núl medzi ne ur n. Medzier je n-1, tak $\binom{n-1}{k-1}$.

Dôsledok 3.3.4.1.

$\forall n \in Z^{+} : p(n) = 2^{n\text{-}1}$.

Dôkaz.

$\forall n \in Z^{+} : p(n) = \sum_{k=1}^{n} p(n\ \ k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n\text{-}1}$.

Lema 3.3.4.2.

$\forall n \in Z^{+}\ \forall k \in N : p'(n, k) = \sum_{i=1}^{k} p'(n-k, i$.

Dôkaz.

Nech $a_1..a_k$ je neusporiadaná partícia n. To znamená, $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$ a teda $\sum_{i=1}^{n} a_i - 1 =$ n - k, č z a , a_1-1, .. , a_k-1 je neusporiadaná partícia n-k o najviac k čl

Dôsledok 3.3.4.2.

$\forall n \in Z^{+} : p'(n) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} p'\ \ n-i, j$.

Dôkaz.

Vyplýva priamo z lemy 3.3.4.2.

3.3.5. Ferrersove diagramy.

Definícia.

Nech $a_1..a_k$ je usporiadaná partícia n. Diagram $\begin{matrix} \circ\circ\ldots\circ \\ a_1 \\ \circ\circ\ldots\circ\ldots\circ \\ a_2 \\ \vdots\ \ \vdots\ \ \circ \\ \circ\circ\ldots\circ\ldots\circ\ldots\circ \\ a_k \end{matrix}$ nazývame *Ferrersov diagram* partície. Diagram je v *normálnom tvare*, ak sú všetky jeho riadky rôzne. *Duálny* diagram k Ferrersovmu diagramu vzniká zámenou jeho riadkov a stĺ v

Označenie.

$R(m, n)$ je poč s a a ý a í í čísla m o najviac n sčí a $Q(m, n)$ je poč s a a ý a í í čísla m, ktorých sčí a s rovné n. Nemýliť s z ač s Ra s y vý čísla !

Veta 3.3.5.1.

$\forall m, n \geq 1 : R(m, n) = Q(m, n)$.

Dôkaz.

Dulány Ferrersov diagram ka a í z $R(m, n)$ jednoznač a í z $Q(m, n)$.

Veta 3.3.5.2.

$\forall 1 \leq m \leq n \in N : Q(n, m) = Q(n, m\text{-}1) + Q(n\text{-}m, m)$.

Dôkaz.

$Q(n\text{-}m, m)$ sú partície, ktorých sčí a < m, tak čí a í y a sčí a s va a í z $Q(n, m)$. $Q(n, m\text{-}1)$ sú partície o menej sčítancoch.

Veta 3.3.5.3.

$\forall 1 \leq m \leq n \in N : R(n, m) = p'(m+n, m)$.

Dôkaz.

Pridaním stĺ a F s v a a a í z $R(m, n)$ sme jej jednoznač priradili partíciu z $p´(m+n, m)$.

Veta 3.3.5.4.

$\forall 1 \le m \le n \in N$: $R(n, m) = p´(n+\binom{m+1}{\ }, m)$, ktorých Ferrersove diagramy sú v normálnom tvare.

Dôkaz.

Nech $a_1 < .. < a_m$ je partícia n a $\begin{matrix}\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{a_1}\\ \underbrace{\circ\circ\cdots\circ\cdots\circ}_{a_2}\\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \\ \underbrace{\circ\circ\cdots\circ\cdots\circ\cdots\circ}_{a_m}\end{matrix}$ je jej Ferrersov diagram. Potom

$\begin{matrix}\circ \\ \circ\circ \\ \circ \binom{m+1}{2} \circ \\ \underbrace{\circ\circ\cdots\circ\cdots\circ}_{m}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{a_1}\\ \underbrace{\circ\circ\cdots\circ\cdots\circ}_{a_2}\\ \vdots \quad \vdots \\ \underbrace{\circ\circ\cdots\circ\cdots\circ\cdots\circ}_{a_m}\end{matrix}$ je Ferrersov diagram v normálnom tvare, prislúchajúci partícii z $p´(n+\binom{m+1}{2}, m)$.

Veta 3.3.5.5.

Počet partí ií na párne sčítan e je rovn počtu partí ií na sčítan e, z ktor h každ sa vyskytuje párny počet krát.

Dôkaz.

Bijekciu tvoria duálne Ferrersove diagramy.

Veta 3.3.5.6.

Počet partí ií na nepárne sčítan e je rovn počtu partí ií na sčítan e, z ktor h každ sa vyskytuje párny počet krát a najväčší nepárny počet krát.

Dôkaz.

Detto.

3.3.6. Eulerova veta.

Definícia.

Riadky n až $r_n + r_{n+k}$ Ferrersovho diagramu nazývame *lichobežík*, ak $\forall i \in n..n+k$: $|r_{i+1}| = |r_i| + 1$.

Poznámka.

Každ Ferrersov diagram v normá nom tvare sa sk adá z pyramídy i ho ežníkov.

Označenie.

Dĺžku prvého riadku Ferrersovho diagramu označíme s. Výšku spodného lichobežníka označíme r.

Veta 3.3.6.1 (Euler).

Nech $x \in R$. Potom v rade A tvaru $A_n = \prod_{k=1}^{n} 1 - x^k$ sú nenulové iba leny tvaru $(-1^{\,k} \frac{k^2 \pm k}{}$, kde $k \in N$.

Dôkaz.

Po roznásobení A_n dostávam rad, za ínaj ci 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22})(1 - x^{23})... . x^m sa v tomto rade nachádza toľko krát, koľko je párnych partícií na rô ne ítance, -x^m toľko krát, koľko je nepárnych partícií m na rôzne s ítance Ukáže e, že ak a x nedá napísať v tvare $(-1)^k \frac{3k^2 \pm k}{2}$, potom po et párnych partícií m na rôzne s ítance je rovnak ako po et nepárnych partícií na rô ne ítance Uvažuj e errer ov ia ra nejakej párnej partície x na rôzne s ítance takže ia ra je v nor álno tvare) Môže na tať niekoľko ituácií :

4. Dia ra o ahuje viac ako je en licho ežník a $s \leq r$. Potom transformáciou, pri ktorej odoberieme prvý riadok diagramu a pridáme ho k posledným s stĺpco , je no na ne ur í e nepárnu partíciu x na rôzne s ítance
5. Je in licho ežník a $s < r$. Tá istá transformácia (ako v prípade 1.).
6. Viac lichobežníkov, $s > r$. Opa ná tran or ácia kaž ho po le n ch s-1 stĺpcov odoberieme jeden prvok a vytvoríme z nich najvrchnejší riadok diagramu).
7. Je in licho ežník, $s > r$+1. Opäť pätná tran or ácia ako v prípa e 3)

Je ine v voch prípa och ne ožno uve en tran or áciu použiť ani v je no ere ne ožno vytvoriť ijekciu e i párny i a nepárny i patrícia i m a teda x^m bude v rade A s nenulovým koeficientom). Ale

9. Jediný lichobežník, $s = r \Rightarrow r^2 + \frac{r\;r-1)}{} = \frac{3r^2 - r}{2}$ a

10. Jediný lichobežník, = r + 1 $\Rightarrow$ r(r + 1) + $\frac{r(r-1}{2} = \frac{3r^2 + r}{2}$, čo tvrdenie dokazuje.