3 Relácie

Ukážeme si, ako pomocou najjednoduchších množinových prostriedkov môžeme definovať ďalšie matematické pojmy.

3.1 Usporiadaná dvojica

Ak a a b sú prvky nejakej množiny, potom symbol $\{a, b\}$ označuje množinu obsahujúcu práve prvky a a b a nazýva sa *neusporiadaná dvojica* prvkov a a b. Pripomíname, že $\{a, b\}$ je to isté ako $\{b, a\}$ a ak $a = b$, potom $\{a, b\}$ je len jednoprvková množina.

V mnohých prípadoch je však poradie prvkov pre pochopenie významu rozhodujúce (napr. poradie údajov v dátume tvaru 1.4.). Stanovenie pevného poradia prvkov realizujeme pojmom usporiadanej dvojice a pri takejto konštrukcii závisí na poradí prvkov.

Definícia 3.1. Množinu $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ nazývame *usporiadanou dvojicou* a označujeme ju symbolom (a, b). Prvok a sa nazýva prvým prvkom (prvou súradnicou), prvok b druhým prvkom (druhou súradnicou) usporiadanej dvojice (a, b).

Nasledujúca veta hovorí, že takto chápaná usporiadaná dvojica je naozaj to, čo si pod týmto pojmom intuitívne predstavujeme.

Veta 3.2. Usporiadaná dvojica (a, b) sa rovná usporiadanej dvojici (c, d) práve vtedy, keď $a = c$ a $b = d$.

Dôkaz. Nech $(a, b) = (c, d)$, teda

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}. \tag{1}$$

Rozlišujme dva prípady: (i) $a = b$ a (ii) $a \neq b$.

V prípade (i) sa rovnosť (1) zmení na rovnosť

$$\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

a hneď dostávame, že $c = d$ a $a = c$.

V prípade (ii) je zrejmé, že musí platiť $c \neq d$. Potom ale z (1) dostávame $\{a\} = \{c\}$, a teda $a = c$. Ďalej $\{a, b\} = \{c, d\}$ a pretože $a = c$, musí platiť $b = d$.

Obrátená implikácia je zrejmá: ak $a = c$ a $b = d$, tak platí (1), t.j. $(a, b) = (c, d)$. □

Poznámka. Všimnime si, že predchádzajúca veta by neplatila, keby sme usporiadanú dvojicu definovali vzťahom $(a, b) = \{a, b\}$.

3.2 Karteziánsky súčin

Pomocou pojmu usporiadanej dvojice zavedieme teraz pojem karteziánskeho súčinu.

Definícia 3.3. Nech A, B sú množiny. *Karteziánskym súčinom* množín A, B nazveme množinu

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Poznámka. Názov karteziánsky súčn pochádza z geometrickej interpretácie: keď napríklad $A = B = \mathbb{R}$, potom $A \times B$ môžeme interpretovať ako všetky body roviny a v tomto prípade a a b sú (karteziánske) súradnice bodu (a, b) roviny.

	1	2	3
a	(a,1)	(a,2)	(a,3)
b	(b,1)	(b,2)	(b,3)
c	(c,1)	(c,2)	(c,3)
d	(d,1)	(d,2)	(d,3)

Tabuľka 1: Tabuľka reprezentujúca karteziánsky súčin množín $A \times B$.

Príklad 3.4. Nech $A = \{a, b, c, d\}$ a $B = \{1, 2, 3\}$. Karteziánsky súčin $A \times B$ sa dá vhodne reprezentovať tabuľkou, ktorá má v tomto prípade 4 riadky a 3 stĺpce. Riadky sú označené a, b, c a d a stĺpce 1, 2, 3 (pozri tabuľku 3.2).

Poznámka. V prípade, že uvažujeme $A \times B$ a $A = B$, označujeme karteziánsky súčin symbolom $A \times A = A^2$.

Nasledujúca veta ukazuje niektoré základné vlastnosti karteziánskeho súčinu:

Veta 3.5. Nech A, B, C sú ľubovoľné množiny, potom platia nasledujúce tvrdenia:

i. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,

ii. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,

iii. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$,

iv. ak A, B, C, D sú neprázdne množiny, tak

$$A \times B = C \times D \equiv A = C \wedge B = D.$$

Dôkaz. Dokážeme si prvú vlastnosť.

$$\begin{aligned}(x, y) &\in A \times (B \cup C) \equiv (x \in A) \wedge (y \in (B \cup C)) \equiv (x \in A) \wedge [(y \in B) \vee (y \in C)] \\ &\equiv [(x \in A) \wedge (y \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (y \in C)] \equiv [(x, y) \in A \times B] \vee [(x, y) \in A \times C] \\ &\equiv (x, y) \in [A \times B \cup A \times C]\end{aligned}$$

□

3.3 Relácie

Veľký význam v súčasnej matematike má pojem relácie, ktorý zahŕňa ako špeciálne prípady pojmy zobrazenie a usporiadanie.

Definícia 3.6. *Binárnou reláciou* R medzi prvkami množín A, B (v takomto poradí) nazývame ľubovoľnú podmnožinu karteziánskeho súčinu $A \times B$, t.j. $R \subseteq A \times B$. Ak $A = B$, tak hovoríme o relácii na množine A (alebo medzi prvkami množiny A).

Ak dvojica (a, b) patrí do R, t.j. $(a, b) \in R$, hovoríme tiež, že prvky a, b sú v relácii R a zapisujeme tiež aRb.

	1	2	3
a	1	0	1
b	0	0	0
c	0	0	1
d	0	1	0

Tabuľka 2: Reprezentácia relácie R

Poznámka. Slovo binárna z predchádzajúcej definície znamená, že relácia je definovaná medzi dvoma množinami. Môžeme však zaviesť aj n-árne relácie, ktoré sú podmnožinami karteziánskeho súčinu n množín $A_1, A_2, \ldots, A_n$. My sa budeme výlučne zaoberať binárnymi reláciami a preto slovo binárny budeme vynechávať.

Poznámka. S podobne zadefinovanými reláciami sme sa už stretli. Napríklad $=$ (rovnosť), $\leq$ (neostrá nerovnosť) sú príkladmi relácií na množine všetkých prirodzených čísel. Prvá z nich pozostáva z dvojíc $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $\ldots$, druhá z dvojíc $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(3,1)$, $\ldots$.

Dôležité je uvedomiť si, že pri reláciach musíme povedať tiež množinu, na ktorej je relácia uvažovaná. Napr. v druhom prípade by na množine všetkých reálnych čísel boli prvkami aj iné dvojice.

Poznámka. Slovo relácia pochádza z koreňa znamenajúceho príbuzenský vzťah. Príbuzenské vzťahy (napr. byť matkou) sú tiež príkladmi relácií na množine ľudí.

Relácia R z množiny A do množiny B (resp. na množine A) sa dá okrem vymenovania prvkov množiny R znázorniť prehľadnejšie tabuľkou (maticová reprezentácia) alebo orientovaným grafom (grafová reprezentácia).

Príklad 3.7. Nech $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{1,2,3\}$ a $R \subseteq A \times B$ je zadefinovaná nasledovne: $R = \{(a,1),(a,3),(c,3),(d,2)\}$.

Tabuľková reprezentácia je daná v tabuľke 3.3:

Pri grafovej reprezentácii prvky množín znázornime krúžkami, ktoré sa nazývajú vrcholmi. Usporiadanú dvojicu znázornime orientovanou hranou (šípka), ktorá ide z vrchola odpovedajúceho prvému prvku dvojice k vrcholu, ktorý odpovedá druhému prvku dvojice.

3.3.1 Skladanie relácií

Uvažujme o nasledujúcej situácií: nech má Peter syna Juraja a Daniel je Petrovým bratom. Potom ľahko usúdime, že Juraj je Danielovým synovcom. Zložením dvoch relácií na množine ľudí „byť synom" a „byť bratom" v tomto poradí sme dostali novú reláciu „byť synovcom".

Definícia 3.8. Ak R je relácia z množiny A do množiny B a S je relácia z množiny B do množiny C potom hovoríme, že usporiadaná dvojica relácií (R,S) sa dá zložiť. Ak sa (R,S) dá zložiť, tak *kompozíciou* (zložením) RS relácií R, S je relácia $T = RS$ z množiny A do množiny C:

$$T = RS = \{(a,c) \mid \exists b \in B \wedge (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\}.$$

Kompozícia RS sa nazýva *zloženou reláciou* a niekedy sa označuje aj ako $S \circ R$ (prípadne $R \circ S$ v závislosti od použitej literatúry).

Kompozícia ľubovoľných relácií nemusí vždy existovať.

Príklad 3.9. Nech $A = \{a_1,a_2,a_3\}$, $B = \{b_1,b_2\}$, $C = \{c_1,c_2,c_3\}$ a relácie $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ nech sú definované nasledovne:

$$\begin{aligned} R &= \{(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_1)\}, \\ S &= \{(b_1,c_1),(b_2,c_3)\}. \end{aligned}$$

Potom $S \circ R$ je relácia z množiny A do množiny C nasledujúco:

$$S \circ R = \{(a_1,c_1),(a_2,c_3),(a_3,c_1)\}.$$

Poznámka. V maticovej reprezentácii relácií maticu zloženej relácie dostaneme vynásobením matíc jednotlivých relácií.

Poznámka. Operácia kompozície sa môže opakovať za sebou a zložiť môžme postupne i viacero relácií, napríklad: nech sú dané množiny A, B, C, D a tri relácie $R \subseteq A \times B$; $S \subseteq B \times C$; $T \subseteq C \times D$. Potom existuje kompozícia $R(ST)$, ale i $(RS)T$. Nasledúca veta hovorí o tom, že obe vzniknuté kompozície sú rovnaké, t.j. že skladanie relácií je asociatívne.

Veta 3.10. Nech sú dané množiny A, B, C, D a relácie $R \subseteq A \times B$; $S \subseteq B \times C$; $T \subseteq C \times D$. Potom $(RS)T = R(ST)$.

Dôkaz. Máme ukázať, že každá usporiadaná dvojica (a,d), $a \in A$, $d \in D$, ktorá patrí do $(RS)T$, patrí aj do $R(ST)$ a obrátene. Ak $(a,d) \in (RS)T$, potom existuje $c \in C$ také, že $(a,c) \in RS \wedge (c,d) \in T$. Ak však $(a,c) \in RS$, potom existuje $b \in B$ také, že $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in S$, t.j. existuje $c \in C$ a $b \in B$ také, že

$$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in S \wedge (c,d) \in T.$$

To znamená, že $(a,b) \in R \wedge (b,d) \in ST$ a teda $(a,d) \in R(ST)$.

Opačné tvrdenie sa dokazuje analogicky. $\square$

Definícia 3.11. Nech je daná binárna relácia $R \subseteq A \times B$. *Opačnou reláciou* alebo inverznou reláciou k relácii R budeme nazývať reláciu

$$R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}.$$

Veta 3.12. Nech sú R, R_1, R_2 relácie z A do B a S relácia z B do C. Potom platí:

i. $(R^{-1})^{-1} = R$,

ii. ak $R_1 \subseteq R_2$, tak $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$,

iii. $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$,

iv. $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$,

v. $(R_1 \setminus R_2)^{-1} = R_1^{-1} \setminus R_2^{-1}$,

vi. $(R^c)^{-1} = (R^{-1})^c$,

vii. $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$,

Dôkaz. Dokážeme si prípad (iii) a (vii) ostatné zostávajú na cvičenie.

Dôkaz (iii):

$$\begin{aligned}(x,y)\in(R_1\cap R_2)^{-1} &\equiv (y,x)\in R_1\cap R_2\equiv(y,x)\in R_1\ \wedge\ (y,x)\in R_2\\ &\equiv (x,y)\in R_1^{-1}\ \wedge\ (x,y)\in R_2^{-1}\equiv(x,y)\in R_1^{-1}\cap R_2^{-1}.\end{aligned}$$

Dôkaz (vii):

$$\begin{aligned}(z,x)\in(RS)^{-1} &\equiv (x,z)\in RS\equiv\exists y\,[y\in B\ \wedge\ (x,y)\in R\ \wedge\ (y,z)\in S]\\ &\equiv \exists y\,[y\in B\ \wedge\ (y,x)\in R^{-1}\ \wedge\ (z,y)\in S^{-1}]\equiv(z,x)\in S^{-1}R^{-1}.\end{aligned}$$

□

3.4 Vlastnosti relácií na množine

Binárne relácie majú mnoho zaujímavých vlastností. My budeme študovať tie, ktoré sa využívajú najčastejšie:

Definícia 3.13. Nech A je množina a R relácia na množine A, t.j. $R\subseteq A\times A$. Reláciu R nazývame

a. *reflexívnou*, ak $\forall a\ [a\in A\Rightarrow(a,a)\in R]$,

b. *symetrickou*, ak $(a,b)\in R\Rightarrow(b,a)\in R$,

c. *antisymetrickou*, ak $[(a,b)\in R\ \wedge\ (b,a)\in R]\Rightarrow(a=b)$,

d. *tranzitívnou*, ak $[(a,b)\in R\ \wedge\ (b,c)\in R]\Rightarrow[(a,c)\in R]$,

e. *trichotomickou*, ak $\forall a,b\ [(a\in A)\ \wedge\ (b\in A)\ \wedge\ a\neq b]\Rightarrow(a,b)\in R\vee(b,a)\in R$.

Príklad 3.14. Uvažujme 6 prvkovú množinu $B=\{1,2,3,4,5,6\}$. Relácia $<$ je príkladom tranzitívnej relácie na B. Relácia x delí y je príkladom reflexívnej, antisymetrickej a tranzitívnej relácie na B. Relácia $=$ je príkladom reflexívnej, symetrickej a tranzitívnej relácie na B. Relácia $\leq$ je príkladom reflexívnej, antisymetrickej a tranzitívnej relácie na B.

V tabuľkovej reprezentácii relácie reflexivita znamená 1 na diagonále, v grafovej reprezentácii pre každý vrchol existenciu smyčky. Symetria v grafovej reprezentácii znamená vždy existenciu orientovanej hrany v oboch smeroch, tranzitivita existenciu „skracujúcej" orientovanej hrany pre všetky cesty dĺžky aspoň 2.

Poznámka. Uvedomme si, že relácia R na množine A je symetrická práve vtedy, keď $R^{-1}\subseteq R$. Relácia R na množine A je tranzitívna práve vtedy, keď $R^2\subseteq R$.

3.4.1 Relácia ekvivalencie a rozklad množiny

Pomocou základných typov relácií možno definovať isté typy relácií:

Definícia 3.15. Relácia R na množine A sa nazýva *relácia ekvivalencie* na A, ak je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Ak R je relácia ekvivalencie na množine A, potom namiesto $(x,y)\in R$ sa zvykne používať aj značenie $x\sim y$, $x\equiv y$, $\simeq$, $\approx$, $\cong$.

Relácia ekvivalencie na množine úzko súvisí s rozkladom danej množiny.

Definícia 3.16. Nech A je množina. Systém $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(A)$ sa nazýva *rozklad* množiny A, ak každá množina systému $\mathcal{S}$ je neprázdna a $\mathcal{S}$ je systém po dvoch disjunktných množín s vlastnosťou $\cup_{M\in\mathcal{S}}M=A$.

Teda rozklad množiny A je taký systém neprázdnych podmnožín množiny A, že každý prvok $x\in A$ patrí práve do jednej množiny toho systému.

Príklad 3.17. Nech m je prirodzené číslo a $\mathbb{Z}$ nech označuje množinu všetkých celých čísel. Označme symbolom $\overline{r}$ $(0\leq r<m)$ zvyškovú triedu modulo m, t.j. množinu všetkých tých celých čísel a, ktoré majú tvar $a=km+r$, pre $k\in\mathbb{Z}$. Potom $\mathcal{S}=\{\overline{0},\overline{1},\ldots,\overline{(m-1)}\}$ je zrejme rozklad množiny $\mathbb{Z}$.

Nasledujúca veta ukazuje súvis medzi reláciou ekvivalencie a rozkladom príslušnej množiny.

Veta 3.18. Nech R je relácia ekvivalencie na množine $A\neq\emptyset$. Pre $x\in A$ označme $R[x]=\{y\in A\mid y\sim x\}$. Potom systém množín $\mathcal{S}=\{R[x]\in\mathcal{P}(A)\mid x\in A\}$ je rozklad množiny A (rozklad množiny A indukovaný ekvivalenciou R alebo patriaci k ekvivalencii R).

Dôkaz. Každá množina $R[x]\in\mathcal{S}$ je neprázdna, pretože $x\in R[x]$.

Ďalej ukážeme, že ak $x\sim x'$, tak $R[x]=R[x']$. Nech $y\in R[x]$. Potom $y\sim x$ a keďže $x\sim x'$, tak $y\sim x'$ a teda $y\in R[x']$. To znamená, že $R[x]\subseteq R[x']$. Podobne sa dokáže, že $R[x']\subseteq R[x]$.

Obrátene, ak $x\not\sim x'$, tak $R[x]\cap R[x']=\emptyset$. Ak by totiž nejaké y patrilo do $R[x]\cap R[x']$, tak by platilo $x\sim y$ a $y\sim x'$, preto aj $x\sim x'$, čo je v spore s predpokladom.

Teda množiny $R[x]$ $(x\in A)$ sú navzájom disjunktné a keďže $x\in R[x]$ pre každé $x\in A$, platí $\cup\mathcal{S}=A$. Teda $\mathcal{S}$ je rozklad množiny A. □

Príklad 3.19. Nech m $(m>1)$ je prirodzené číslo. Hovoríme, že $a\in\mathbb{Z}$ je kongruentné s číslom b modulo m (v označení $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$), ak m delí rozdiel $a-b$. Označme

$$R=\{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)\}.$$

Ľahko zistíme, že R je relácia ekvivalencie na $\mathbb{Z}$ a ňou indukovaný rozklad bol uvedený v prechádzajúcom príklade.

Veta 3.20. Nech A je neprázdna množina a $\mathcal{S}$ jej rozklad. Definujme na množine A reláciu R takto:

$$R=\{(x,y)\in A\times A\,|\,\exists M\in\mathcal{S}\ \wedge\ x\in M\ \wedge\ y\in M\}.$$

Potom R je relácia ekvivalencie na množine A a $\mathcal{S}$ je ňou indukovaný rozklad.

Dôkaz. Ľahko možno overiť, že R je reflexívna, symetrická a tranzitívna relácia.

Označme znakom $\mathcal{S}_0$ rozklad množiny A indukovaný reláciou ekvivalencie R. Dokážeme, že $\mathcal{S}=\mathcal{S}_0$. Nech $R[x]\in\mathcal{S}_0$. Potom x patrí do nejakej množiny systému $\mathcal{S}$, povedzme $x\in M$, $M\in\mathcal{S}$. Nech $y\in M$. Potom zrejme $y\in R[x]$. A obrátene, ak $y\in R[x]$, tak y patrí do tej istej množiny ako x, t.j. $y\in M$. Teda $R[x]=M$ a tak $R[x]\in\mathcal{S}$.

Nech obrátene $H\in\mathcal{S}$. Potom $H\neq\emptyset$ a tak existuje $x\in H$. Na základe definície relácie R potom platí $H=R[x]$ a tak $H\in\mathcal{S}_0$. □

Príklad 3.21. Nech $A = \{0, 1, 2\}$. Zostrojme všetky rozklady množiny A a nájdime k nim príslušné relácie ekvivalencie.

Existuje zrejme 5 rôznych rozkladov množiny A:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}, \quad \mathcal{S}_2 = \{\{0,1\}, \{2\}\}, \quad \mathcal{S}_3 = \{\{0,2\}, \{1\}\}, \\ \mathcal{S}_4 &= \{\{1,2\}, \{0\}\}, \quad \mathcal{S}_5 = \{\{0,1,2\}\}. \end{aligned}$$

Príslušné relácie ekvivalencie vyzerajú takto:

$$\begin{aligned} R_1 &= I_A = \{(0,0), (1,1), (2,2)\}, \\ R_2 &= I_A \cup \{(0,1), (1,0)\}, \\ R_3 &= I_A \cup \{(0,2), (2,0)\}, \\ R_4 &= I_A \cup \{(1,2), (2,1)\}, \\ R_5 &= A \times A. \end{aligned}$$

3.4.2 Usporiadanie a čiastočné usporiadanie

V tejto časti sa zoznámime s ďalším dôležitým typom relácií – usporiadaním. Na množine sa veľmi často zavádza relácia usporiadania, ktorá umožňuje prvky množiny nejakým spôsobom porovnávať alebo usporiadať. Pre číselné množiny sú takéto relácie dobre známe (usporiadanie čísel podľa veľkosti). Často však potrebujeme usporiadať prvky množín, pre ktoré neexistuje také prirodzené usporiadanie ako pre čísla. Aby sme pre ne vedeli zaviesť vhodné usporiadanie, popíšeme teraz základné vlastnosti relácie usporiadania a uvedieme niekoľko dôležitých relácií usporiadania.

Definícia 3.22. *Čiastočné usporiadanie* na nejakej množine A je každá relácia na A, ktorá je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Usporiadaná množina je dvojica (A, R), kde A je množina a R usporiadanie na A.

Poznámka. Niekedy sa vynecháva slovo čiastočné a hovorí sa len o usporiadaní na množine, niekedy sa používa skratka ČUM.

Príklad 3.23. Nasledujúce množiny sú čiastočne usporiadané:
1. Množina prirodzených čísel s reláciou $\leq$.
2. $\mathcal{P}(A)$ s reláciou $\subseteq$.

Pre relácie usporiadania sa často používajú symboly $\preceq$ alebo $\leq$. Prvý z nich je užitočný, ak chceme napr. hovoriť ešte o nejakom inom usporiadaní množiny prirodzených čísel, než je obvyklé usporiadanie podľa veľkosti.

Definícia 3.24. Ak platí $a \leq b$ alebo $b \leq a$, prvky a, b nazývame *porovnateľnými* v $(A, \leq)$. Ak sú ľubovoľné dva prvky usporiadanej množiny porovnateľné, t.j. relácia usporiadania je navyše trichotomická, nazývame ju *úplne (lineárne) usporiadanou množinou* (LUM).

Príklad 3.25. Nasledujúce množiny sú lineárne usporiadané:
1. Množina prirodzených čísel s reláciou $\leq$.
2. Na ľubovoľnej množine A môžeme definovať reláciu S, v ktorej je každý prvok x v relácii len sám so sebou, t.j. $S = \{(x, x); x \in S\}$. Je zrejmé, že množina A s takouto reláciou je ČUM, ale nie je lineárne usporiadanou množinou.

Definícia 3.26. Ak máme nejaké čiastočné usporiadanie $\preceq$, definujeme odvodenú reláciu *ostré usporiadanie* $\prec$: $a \prec b$ práve vtedy, keď $a \preceq b$ a $a \neq b$. Ďalej môžeme definovať „obrátenú nerovnosť“, t.j. reláciu $\succ$, vzťahom $a \succ b \Leftrightarrow b \prec a$.

Konečné ČUM môžeme znázorňovať pomocou šípok, ako ktorékoľvek relácie. V takýchto obrázkoch však typicky bude veľa šípok (napr. pre 10 prvkovú LUM by sme museli nakresliť 45 šípok a 10 smyčiek). Veľa šípiek sa dá ale zrekonštruovať z tranzitivity: ak napríklad vieme, že $x \preceq y$ a $y \preceq z$, potom už tiež $x \preceq z$ a šípku z x do z môžeme vynechať. Podobne smyčky nie je treba kresliť. Pre konečné ČUM zachycuje všetku potrebnú informáciu relácia „byť bezprostredným predchodcom“, ktorú teraz definujeme.

Definícia 3.27. Nech $(A, \preceq)$ je ČUM. Hovoríme, že prvok $x \in A$ je *bezprostredným predchodcom* prvku $y \in A$, ak platí:

- $x \prec y$ a
- neexistuje žiadne $t \in A$ také, že $x \prec t \prec y$

Práve zavedenú reláciu bezprostredného predchodcu môžeme označiť napríklad $\lhd$.

Ukážeme si, že usporiadanie $\preceq$ je možné zrekonštruovať z relácie $\lhd$.

Lema 3.28. Nech $(A, \preceq)$ je konečná usporiadaná množina, $\lhd$ je príslušná relácia bezprostredného predchodcu. Potom pre ľubovoľné dva prvky $x, y \in A$ platí $x \prec y$ práve keď existujú prvky $x_1, x_2, \ldots, x_k \in A$ také, že $x \lhd x_1 \lhd \ldots \lhd x_k \lhd y$ (prípadne môže byť i $k = 0$, t.j. priamo $x \lhd y$.)

Dôkaz. Jedna implikácia je zrejmá: ak máme $x \lhd x_1 \lhd \ldots \lhd x_k \lhd y$, potom podľa definície bezprostredného predchodcu je i $x \prec x_1 \prec \ldots \prec x_k \prec y$ a z tranzitivity relácie $\prec$ vyplýva $x \preceq y$.

Opačnú implikáciu budeme dokazovať indukciou. Budeme dokazovať nasledujúce: nech $x, y \in A$, $x \preceq y$ sú také dva prvky, že existuje najviac n prvkov $t \in A$ spĺňajúcich $x \prec t \prec y$. Potom existujú $x_1, x_2, \ldots, x_k \in A$ také, že $x \lhd x_1 \lhd \ldots \lhd x_k \lhd y$.

Pre $n = 0$ predpoklad tohoto tvrdenia hovorí, že neexistuje žiadne t, $x \prec t \prec y$ a preto $x \lhd y$, čiže tvrdenie platí.

Nech sformulované tvrdenie platí pre všetky n až do n_0 a majme $x \preceq y$ také, že množina $M_{xy} = \{t \in A \mid x \prec t \prec y\}$ má $n_0 + 1$ prvkov. Vyberme jeden prvok $u \in M_{xy}$ a uvažujme množiny $M_{xu} = \{t \in A \mid x \prec t \prec u\}$ a podobne M_{uy}. Z tranzitivity $\preceq$ vyplýva, že $M_{xu} \subset M_{xy}$, $M_{uy} \subset M_{xy}$. Množiny M_{xu} a M_{uy} majú o jeden prvok menej než M_{xy} (pretože $u \notin M_{xu}, M_{uy}$) a podľa indukčného predpokladu nájdeme prvky $x_1, \ldots, x_k$ a $y_1, \ldots, y_l$ také, že $x \lhd x_1 \lhd \ldots \lhd x_k \lhd u$ a $u \lhd y_1 \lhd \ldots \lhd y_l \lhd y$. Spojením oboch prechádzajúcich „retiazok“ dostaneme požadovanú postupnosť spájajúcu x a y. □

Pre znázornenie konečnej ČUM teda stačí nakresliť šípkami len reláciu bezprostredného predchodcu. Ak príjmeme konvenciu, že v obrázku pôjdu všetky šípky smerom hore (t.j., ak je $x \prec y$, bude x nakreslené vyššie ako y), nemusíme ani zakresľovať smer šípiek, stačí kresliť spojnice bodov. Takémuto znázorneniu ČUM sa hovorí *Hassov diagram*.

Príklad 3.29. 1. Hassov diagram pre všetky podmnožiny potenčnej množiny $A = \{1, 2, 3\}$ usporiadaný reláciou inklúzie vyzerá ako model kocky otočený jediným vrcholom dolu. V najspodnejšom vrchole kocky je $\emptyset$, v najvrchnejšom množina A. Vo vrcholoch vo vzdialenosti 1 od základného vrcholu sú jednoprvkové podmnožiny, v ostatných troch vrcholoch sú 2-prvkové podmožiny patrične umiestnené vzhľadom na inklúziu. Z uvedeného diagramu je napr. vidieť, že množiny $\{1, 2\}$ a $\{1, 3\}$ sú vzhľadom na uvedenú reláciu neporovnateľné.

2. Nakreslite si Hassov diagram pre reláciu deliteľnosti na množine $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

Teraz, keď vieme graficky zobraziť usporiadanú množinu, nebude problém pochopiť podstatu ďalších dôležitých pojmov, ktoré súvisia s usporiadaním.

Definícia 3.30. Nech $(A, \preceq)$ je usporiadaná množina a nech relácia $\prec$ je ostré usporiadanie zodpovedajúce usporiadaniu $\preceq$. Prvok $a \in A$ nazývame
a) *minimálnym prvkom* množiny A, ak nie je pravda, že

$$\exists x\ [(x \in A)\ \wedge\ (x \prec a)],$$

b) *najmenším prvkom* množiny A, ak

$$\forall x\ [(x \in A) \Rightarrow (a \preceq x)],$$

c) *maximálnym prvkom* množiny A, ak nie je pravda, že

$$\exists x\ [(x \in A)\ \wedge\ (a \prec x)],$$

d) *najväčším prvkom* množiny A, ak

$$\forall x\ [(x \in A) \Rightarrow (x \preceq a)].$$

Poznámka. Stručne povedané, na množine (A, R) neexistuje menší prvok ako minimálny, väčší ako maximálny prvok a všetky prvky A (okrem najväčšieho) sú menšie než najväčší a s výnimkou najmenšieho sú väčšie než najmenší prvok množiny A.

To znamená, že (A, R) môže mať viacero maximálnych a viacero minimálnych prvkov, ale najviac jeden najväčší a najviac jeden najmenší prvok.

3.5 Funkcie (zobrazenia)

Zobrazenia (funkcie) sú „len“ zvláštnym prípadom relácií. V matematike však zohrávajú veľmi dôležitú úlohu. Trvalo však dlho, až sa dospelo k dnešnému chápaniu funkcie; napríklad v dobe objavenia diferenciálneho počtu sa uvažovali len reálne alebo komplexné funkcie a „poctivá“ funkcia musela byť vyjadrená nejakou formulkou. To, že napr. reálna funkcia môže priraďovať každému reálnemu číslu nejaké celkom ľubovoľné reálne číslo, je celkom moderný vynález.

Definícia 3.31. Funkcia z množiny X do množiny Y je relácia $f \subseteq X \times Y$, splňujúca dodatočnú podmienku, že pre každý prvok $x \in X$ existuje práve jediný prvok $y \in Y$ tak, že xfy.

Pre funkcie sa ovšem nepoužíva značenie, ktoré bolo zavedené pre relácie. Ak je $f \subseteq X \times Y$ relácia, ktorá je funkciou, $f(x)$ označuje to jediné $y \in Y$, pre ktoré xfy. Prvok $f(x)$ sa nazýva *obrazom prvku* x v zobrazení f (alebo hodnotou funkcie f v prvku x). Ďalej množinu $\{f(x) \mid x \in X\}$ označujeme $f(X)$.

To, že f je funkcia z množiny X do množiny Y, zapisujeme takto: $f : X \to Y$, X sa nazýva tiež definičný obor, Y je obor hodnôt.

Pri grafickom znázornení relácie predchádzajúca definícia znamená, že z každého bodu množiny X vychádza práve jedna šípka.

Príklad 3.32. 1. Konštantná funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, napr. pre $\forall\, x \in \mathbb{R}\ f(x) = 3$.
2. Postupnosť prvkov $a_1, \ldots, a_n$ z A možno chápať ako zobrazenie $f : \mathbb{N} \to A$ také, že $f(i) = a_i$.

V definícii zobrazenia sa nič nehovorilo o tom, koľko prvkov z X sa môže zobraziť na nejaký prvok z Y, resp. či sa na každý prvok množiny Y zobrazí nejaký prvok množiny X. Ak pridáme vhodné podmienky, dostaneme dôležité triedy zobrazení.

Definícia 3.33. Zobrazenie $f : X \to Y$ sa nazýva

i. *injektívne* (prosté), ak pre $x \neq y$ je $f(x) \neq f(y)$,

ii. *surjektívne* (na), ak pre každé $y \in Y$ existuje aspoň jedno $x \in X$ spĺňajúce $f(x) = y$,

iii. *bijektívne* (vzájomne jednoznačné, jedno-jednoznačné), ak f je injektívne a zároveň surjektívne.

V obrázkovom znázornení funkcie pomocou šípiek sa tieto druhy funkcií rozlišujú nasledujúco:

i. v prípade injektívnej funkcie vchádza do každého bodu $y \in Y$ najviac jedna šípka,

ii. pre surjektívnu funkciu vchádza do každého bodu $y \in Y$ aspoň jedna šípka,

iii. pre bijekciu vchádza do každého bodu $y \in Y$ práve jedna šípka.

Funkcie môžeme skladať analogicky ako relácie.

Lema 3.34. Nech $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ sú funkcie. Potom platí:

i. Ak sú f a g prosté funkcie, je tiež $g \circ f$ prostá funkcia.

ii. Ak sú f a g funkcie na, je tiež $g \circ f$ funkcia na.

iii. Ak sú f a g vzájomne jednoznačné funkcie, je tiež $g \circ f$ vzájomne jednoznačná funkcia.

iv. Pre každú funkciu $f : X \to Y$ existuje množina Z, prostá funkcia $h : Z \to Y$ a funkcia na $g : X \to Z$ tak, že $f = h \circ g$. (Teda každú funkciu je možné napísať ako zloženie funkcie prostej a funkcie na.)

Dôkaz. Časti (i), (ii), (iii) sa dostanú ako priame overenie definície. Dokážeme napr. (iv). Zvoľme $z \in Z$, hľadáme $x \in X$ spĺňajúce $(g \circ f)(x) = z$. Pretože g je funkcia na, existuje najprv $y \in Y$ tak, že $g(y) = z$. A pretože f je funkcia na, existuje tiež tiež $x \in X$ spĺňajúce $f(x) = y$. Nájdené x je hľadaný prvok spĺňajúci $(g \circ f)(x) = z$.

Najzaujímavejší je bod (iv). Zrejme stačí zobrať $Z = f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ (je teda $Z \subseteq Y$). Definujme zobrazenie $g : X \to Z$ a $h : Z \to Y$ predpisom: $g(x) = f(x)$ pre $x \in X$ a $h(z) = z$ pre $z \in Z$. Zrejme g je funkcia na, h je funkcia prostá a $f = h \circ g$. $\square$

Lema 3.35. Nech X je nejaká n-prvková množina, Y je nejaká m-prvková množina, $m, n \geq 0$.
(a) Počet všetkých zobrazení $f : X \to Y$ je m^n (predpokladáme $m \geq 1$).
(b) Počet všetkých prostých zobrazení $f : X \to Y$ je práve

$$m(m-1)\ldots(m-n+1) = \prod_{i=0}^{n-1}(m-i).$$

(c) Ak $n = m$, potom počet všetkých bijektívnych zobrazení $f : X \to Y$ je práve $m!$.

DÔKAZ. (a) Lemátko si dokážeme indukciou podľa n.

Pre $n = 0$ uvažujme zobrazenie prázdnej množiny. Ak sa pozrieme na definíciu zobrazenia, je to relácia (teda podmnožina $X \times Y$, čiže v našom prípade podmnožina prázdnej množiny) spĺňajúca istú podmienku – pre každý prvok $a \in X$ existuje v relácii práve jedna dvojica tvaru (a, b). kde $b \in Y$. V našom prípade X žiadny prvok nemá a preto uvedená podmienka nič nepožaduje, čiže jediná možná relácia je prázdna je tiež zobrazením $X \to Y$. Dokazované tvrdenie platí pre $n = 0$.

Predpokladajme, že sme tvrdenie dokázali pre každé $n \leq n_0$ a pre každé m. Teraz máme $n = n_0 + 1$, n-prvkovú množinu X a m-prvkovú množinu Y. Zvoľme ľubovoľne jeden prvok $a \in X$. Zadať zobrazenie $f : X \to Y$ je to isté, ako zadať hodnotu $f(a) \in Y$ a zobrazenie $f' : X \setminus \{a\} \to Y$ zostávajúcich prvkov. Hodnotu $f(a)$ môžeme zvoliť m spôsobmi a pre voľbu f' máme podľa indukčného predpokladu m^{n-1} možností. Každú voľbu $f(a)$ môžeme skombinovať s ľubovoľnou voľbou f', takže celkový počet možností pre f je rovný $m \cdot m^{n-1} = m^n$.

(b) Dôkaz budeme zase robiť indukciou podľa n. Pre $n = 0$, prázdne zobrazenie je prosté, teda existuje jediné. Pre $n > m$ žiadne prosté zobrazenie neexistuje, čo sa prejaví aj na súčte, lebo jeden činiteľ je rovný 0.

Majme n-prvkovú množinu X, $n \geq 1$ a m-prvkovú množinu Y, $m \geq n$. Vyberme prvok $a \in X$ a zvoľme jeho funkčnú hodnotu $f(a) \in X$ ľubovoľne, jedným z m spôsobov. Zostáva proste zobraziť prvky $X \setminus \{a\}$ do $Y \setminus \{f(a)\}$, pre čo existuje podľa indukčného predpokladu $(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$ možností. Celkom dostaneme

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$$

prostých zobrazení $X \to Y$.

(c) Analogicky ako v predchádzajúcom prípade. $\square$