4 Mohutnosti množín

Ako sme si všimli, pri niektorých množinách je možnosť určiť (aspoň teoreticky) počet prvkov v množine. K takýmto množinám patrí napríklad počet poslucháčov na tejto prednáške, počet obyvateľov zemegule, počet všetkých atómov v slnečnej sústave. Každá z týchto množín obsahuje konečný, aj keď možno pre nás neznámy počet prvkov. Naproti tomu existujú nekonečné množiny, ako napr. množina všetkých prirodzených čísel, reálnych čísel, atď. Ak hovoríme, že množina obsahuje nekonečný počet prvkov (alebo že je nekonečná) myslíme tým, že ak vyberáme postupne po jednom rozličné prvky danej množiny, po každom výbere v tejto množine ešte zostanú prvky.

Ak potrebujeme porovnať dve konečné množiny, môžeme porovnávať ich počty prvkov a posúdiť, či majú rovnaký počet prvkov, alebo či je v jednej množine väčší počet prvkov ako v druhej.

Čo však s nekonečnými množinami? Má zmysel pýtať sa, či je viac prirodzených, celých, alebo reálnych čísel?

Na to, aby sme porovnali dve konečné množiny A, B, nepotrebujeme počítať počty ich prvkov. Stačí, aby sme sa pokúsili vytvoriť bijekciu z A do B. Ak sa nám to podarí, priradili sme každému prvku množiny A práve jeden prvok z B a opačne. Ak takáto bijekcia medzi konečnými množinami A, B existuje, potom A a B majú rovnaký počet prvkov.

Tento spôsob porovnávania množín možno použiť aj pre nekonečné množiny.

4.1 Spočítateľné množiny

Najjednoduchšou nekonečnou množinou je množina prirodzených čísel $\mathbb{N}$.

Definícia 4.1. Množinu A nazveme *spočítateľnou*, ak existuje bijekcia medzi A a $\mathbb{N}$.

Konečné a spočítateľné množiny budeme označovať spoločným názvom *nanajvýš spočítateľné množiny*.

Nekonečná množina, ktorá nie je spočítateľná, sa nazýva *nespočítateľná*.

Ináč povedané, spočítateľná množina je taká množina, ktorej prvky možno očíslovať pomocou prirodzených čísel; t.j. vytvoriť postupnosť navzájom rôznych prvkov množiny A

$$a_1, \dots, a_n, \dots .$$

Príklad 4.2. (i) Množina všetkých celých čísel $\mathbb{Z}$ je spočítateľná. Hľadaná bijekcia je $f(x) = 2x - 1$, ak $x > 0$ a $f(x) = 2|x|$, ak $x \le 0$.

(ii) Množina všetkých párnych nezáporných čísel. Hľadaná bijekcia je $f(2x) = x$.

Ukážeme si nejaké všeobecné vlastnosti spočítateľných množín. Nasledujúca veta hovorí, že spočítateľné množiny sú v istom zmysle „najmenšie“ nekonečné množiny:

Veta 4.3. Ľubovoľná nekonečná množina M obsahuje spočítateľnú podmnožinu.

Dôkaz. Keďže M je nekonečná množina $M \neq \emptyset$ a teda z M môžeme vybrať nejaký prvok. Označme tento prvok symbolom a_1. Z toho, že množina M je nekonečná vyplýva, že $M \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$ a teda v M existuje aspoň jeden prvok. Vyberieme ho a označíme symbolom a_2. Takto môžeme postupovať ďalej a postupne vytvoríme množinu

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\},$$

ktorá je spočítateľná. $\square$

Veta 4.4. Ľubovoľná podmnožina spočítateľnej množiny je nanajvýš spočítateľná množina.

Dôkaz. Nech je A spočítateľná množina. To znamená, že všetky prvky množiny A možno očíslovať prirodzenými číslami a samotnú množinu možno reprezentovať nekonečnou postupnosťou

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots .$$

Nech je B ľubovoľná podmnožina množiny A a nech je a_{n_1} prvý prvok v hore uvedenej postupnosti, ktorý patrí do B; a_{n_2} je druhý takýto prvok, atď. Sú možné dva prípady: buď po konečnom počte krokov vyčerpáme celú množinu B a to znamená, že B je konečná, alebo dostaneme nekonečnú postupnosť

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots$$

pozostávajúcu zo všetkých prvkov množiny B. Ak označíme a_{n_k} symbolom b_k, vidíme, že B je spočítateľná množina. $\square$

Veta 4.5. Zjednotenie nanajvýš spočítateľného systému nanajvýš spočítateľných množín je nanajvýš spočítateľná množina.

Dôkaz. Predpokladajme najprv, že množín tvoriacich systém je spočítateľne veľa, že každá z nich je spočítateľná a že sú po dvoch disjunktné:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \dots, a_{1,n}, \dots,\} \\ A_2 &= \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \dots, a_{2,n}, \dots,\} \\ &\vdots \\ A_m &= \{a_{m,1}, a_{m,2}, a_{m,3}, \dots, a_{m,n}, \dots,\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Potom môžeme prvky množiny $A = \bigcup_m A_m$ usporiadať do postupnosti nasledujúcim spôsobom:

$$a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{1,3}, a_{2,2}, a_{3,1}, a_{1,4}, a_{2,3}, \dots .$$

Ak by systém obsahoval len konečne veľa množín (napr. m), z horeuvedenej postupnosti by vypadli všetky prvky $a_{j,i}$, $j > m$, $i \in \mathbb{N}$. Ak množina A_k obsahuje len konečne veľa prvkov (napr. r), tak z uvedenej postupnosti vypadnú prvky $a_{k,i}$, $i > r$. A napokon, ak množiny A_i nie sú disjunktné, v postupnosti ponecháme z viacerých výskytov toho istého prvku vždy len jeden.

Vo všetkých troch prípadoch dostávame podpostupnosť horeuvedenej postupnosti, ktorá je podľa vety 4.4 buď konečná alebo spočítateľná. $\square$

K pojmu spočítateľných množín sme dospeli porovnávaním nekonečných množín s množinou prirodzených čísel. Porovnávať medzi sebou však môžeme ľubovoľné dve množiny.

Definícia 4.6. Dve množiny A a B sa nazývajú ekvivalentné, ak medzi nimi existuje bijekcia. Ekvivalentnosť množín A, B sa zapisuje $A \sim B$.

Ekvivalenciu možno aplikovať na ľubovoľné množiny a to tak konečné, ako aj nekonečné. Dve konečné množiny sú ekvivalentné, ak majú rovnaký počet prvkov. Množina je spočítateľná, ak je ekvivalentná s množinou prirodzených čísel.

Z tranzitívnosti vzťahu $\sim$ vyplýva, že ak sú dve množiny ekvivalentné s treťou množinou, potom sú ekvivalentné aj medzi sebou.

Príklad 4.7. (i) Interval $\langle a, b\rangle$, $(a \neq b)$ reálnej osi je ekvivalentný s ľubovoľným intervalom $\langle c, d\rangle$, $(c \neq d)$ reálnej osi. Hľadaná bijekcia je lineárna funkcia

$$f(x) = \frac{(c-d)\cdot x}{(a-b)} + \frac{ad-bc}{(a-b)}.$$

(ii) Množina všetkých reálnych čísel x otvoreného intervalu $(0, 1)$ je ekvivalentná s množinou všetkých bodov y reálnej osi. Bijekciu možno definovať napr. pomocou funkcie:

$$y = \frac{1}{\pi}\cdot \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}.$$

V prechádzajúcich príkladoch sme mohli pozorovať zaujímavú vlastnosť nekonečných množín: množina je ekvivalentná so svojou vlastnou podmnožinou, napr. $\langle 0, 2\rangle \sim \langle 0, 1\rangle$, $(0, 1) \sim \mathbb{R}$. Podobne tomu je aj v prípade spočítateľných množín (napr. $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$). Táto vlastnosť je charakteristická pre nekonečné množiny, ale neplatí pre konečné množiny.

Veta 4.8. Každá nekonečná množina M je ekvivalentná s niektorou svojou vlastnou podmnožinou.

DÔKAZ. Podľa vety 4.3 možno z množiny M vybrať spočítateľnú podmnožinu $A = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$. Množinu A rozložíme na dve spočítateľné množiny

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_1, a_3, \ldots\},\\ A_2 &= \{a_2, a_4, \ldots\}. \end{aligned}$$

Medzi množinami A a A_1 zostrojíme bijekciu, napr. $f : A \to A_1$; $f(a_i) = a_{2i-1}$. Zobrazenie f rozšírime na bijekciu medzi množinami $(M \setminus A) \cup A$ a $(M \setminus A) \cup A_1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \quad \text{pre } x \in M \setminus A\\ f(a_i) &= a_{2i-1} \quad \text{pre } a_i \in A, \end{aligned}$$

kde $(M \setminus A) \cup A_1 = M \setminus A_2$. Zostrojili sme teda bijekciu medzi M a jej vlastnou podmnožinou $M \setminus A_2$. $\square$

Nekonečnú množinu môžeme teraz definovať takto: množina je nekonečná práve vtedy, ak je ekvivalentná s niektorou svojou vlastnou podmnožinou.

4.2 Nespočítateľné množiny

Dosiaľ sme sa zaoberali len spočítateľnými nekonečnými množinami a ukázali sme, že pomocou zjednotenia spočítateľného systému spočítateľných množín dostávame opäť len spočítateľnú množinu a ani karteziánsky súčin spočítateľných množín nedáva viac než spočítateľnú množinu. Vzniká otázka, či existujú nespočítateľné (nekonečné) množiny. V ďalšom si ukážeme, že tomu tak skutočne je.

Veta 4.9. Množina ${}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}$ je nespočítateľná.

DÔKAZ. Predpokladajme, že ${}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}$ je spočítateľná množina. Je to množina postupností, ktorých členmi sú čísla 0 a 1. Zrejme ${}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}$ je nekonečná množina. Preto podľa nášho predpokladu možno všetky jej prvky zoradiť do prostej postupnosti

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

kde

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)}, \ldots,\\ x_2 &= a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_n^{(2)}, \ldots,\\ &\vdots\\ x_k &= a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}, \ldots,\\ &\vdots \end{aligned}$$

pričom $a_n^{(k)} = 0$ alebo 1 pre každé $n, k \in \mathbb{N}$.

Ak sa nám podarí zostrojiť takú postupnosť čísel 0, 1, ktorá by bola rôzna od každého x_k $(k = 1, 2, \ldots)$, dospejeme ku sporu.

Zvoľme $b_n = 1 - a_n^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Zrejme $y = \{b_n\}_1^\infty$ je postupnosť čísel 0, 1 a $b_n \neq a_n^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Preto postupnosť y je rôzna od každého x_k $(k = 1, 2, \ldots)$. $\square$

Spôsob, akým sme zostrojili novú postupnosť sa nazýva *Cantorova diagonalizačná metóda*.

Iným príkladom nespočítateľnej množiny je množina $\mathbb{R}$ všetkých reálnych čísel.

Veta 4.10. Množina všetkých reálnych čísel ležiacich v intervale $\langle 0, 1\rangle$ je nespočítateľná.

4.3 Cantorova-Bernsteinova veta

Dokázať ekvivalenciu množín A, B tak, že sa konštruuje bijekcia $\varphi : A \to B$ nebýva vždy jednoduchá úloha. Jednoduchší postup umožňuje nasledujúca veta.

Veta 4.11. Nech A, B sú ľubovoľné množiny. Ak existuje injektívne zobrazenie $f : A \to B$ a injektívne zobrazenie $g : B \to A$, potom množiny A, B sú ekvivalentné.

4.4 Kardinálne čísla

Ak sú dve konečné množiny ekvivalentné, tak obsahujú rovnaký počet prvkov. Ak sú ekvivalentné dve nekonečné množiny, hovoríme, že majú rovnakú mohutnosť. Pojem mohutnosti pre konečné množiny sa zhoduje s pojmom počtu prvkov.

Mohutnosť množiny prirodzených čísel označíme symbolom $\aleph_0$ ($\aleph$ je hebrejské písmeno alef, $\aleph_0$ symbol sa číta alef nula). To znamená, že všetky spočítateľné množiny majú mohutnosť $\aleph_0$.

Množina reálnych čísel má mohutnosť kontinua. Podobne ako v prípade spočítateľných množín, majú všetky množiny ekvivalentné s množinou reálnych čísel mohutnosť kontinua. Mohutnosť kontinua označujeme symbolom c.

Mohutnosti množín sa nazývajú *kardinálnymi číslami*. Zatiaľ poznáme kardinálne čísla 0, 1, 2, ..., n, ..., $\aleph_0$ a c a zakrátko ukážeme, že existujú aj ďalšie kardinálne čísla.

Mohutnosti konečných množín vyjadrujeme pomocou prirodzených čísel. Keďže množina prirodzených čísel je usporiadaná, pre ľubovoľné dve konečné množiny A, B možno povedať, ktorá z týchto troch možností nastáva:

$$|A| < |B|, |A| > |B|, |A| = |B|.$$

Pomocou nasledujúcej metódy však možno porovnávať aj mohutnosti nekonečných množín:

Nech A, B sú ľubovoľné množiny a nech $|A| = \alpha$, $|B| = \beta$ sú kardinálne čísla (mohutnosti) množín A, B.

Sú možné 4 prípady:

1. Existujú injekcie $f : A \to B$ a $g : B \to A$. Potom $A \sim B$ a $\alpha = \beta$.
2. Existuje injekcia $f : A \to B$, ale neexistuje injekcia $g : B \to A$. Potom $\alpha < \beta$.
3. Existuje injekcia $g : B \to A$, ale neexistuje injekcia $f : A \to B$. Potom $\beta < \alpha$.
4. Neexistuje žiadna injekcia $f : A \to B$ ani $g : B \to A$. Potom sú kardinálne čísla α, β neporovnateľné.

Posledný prípad však nemôže nastať (vyplýva to zo Zermelovej vety). To znamená, že pre ľubovoľné kardinálne čísla α, β platí jedna z troch možností:

$$\alpha = \beta, \alpha < \beta, \alpha > \beta.$$

Vieme, že spočítateľné množiny sú „najmenšie“ nekonečné množiny a že okrem nich existujú množiny mohutnosti kontinua. Existujú však množiny väčšej mohutnosti ako je c? Existuje „najväčšie“ kardinálne číslo?

Veta 4.12. Nech je M ľubovoľná množina a $\mathcal{P}(M)$ jej potenčná množina. Potom

$$|M| < |\mathcal{P}(M)|.$$

DÔKAZ. Injekciu $f : M \to \mathcal{P}(M)$ zostrojíme ľahko: prvku x priradíme jednoprvkovú množinu $\{x\}$.

Dokázať neexistenciu injekcie $g : \mathcal{P}(M) \to M$ bude zložitejšie. Predpokladajme, že injekcia $g : \mathcal{P}(M) \to M$ existuje. Ukážeme, že existuje aspoň jedna množina X, ktorá sa nemá na čo zobraziť, Nech

$$X = \{a \in M \mid a \notin g^{-}(a)\}.$$

Na čo sa zobrazí množina X?

Nech $g(X) = x$, t.j. $X = g^{-}(x)$. Patrí x do množiny X? Ak platí $x \notin X$, potom podľa definície X by malo platiť $x \in X$. Ak však $x \in X$, potom $x \in g^{-1}(x)$ a to je spor s definíciou množiny X. To znamená, že taký prvok $x \in M$, pre ktorý $g(X) = x$, neexistuje. Tým je veta dokázaná. □

Z predchádzajúcej vety vyplýva, že k množine ľubovoľnej mohutnosti možno zostrojiť množinu väčšej mohutnosti. To znamená, že možno zostrojiť zhora neohraničenú rastúcu postupnosť kardinálnych čísel.

V matematickej analýze sa budeme najčastejšie stretávať s množinami mohutnosti $\aleph_0$ a c. Ukážeme, aký je medzi nimi vzťah. Nech je M n-prvková množina. Potom potenčná množina $\mathcal{P}(M)$ bude mať 2^n ($= 2^{|M|}$) prvkov. Zovšeobecníme toto značenie aj pre nekonečné množiny a označme $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Veta 4.13. $2^{\aleph_0} = c$.