9. OHRANIČENIA A VÄZBY

Ohraničenia tvoria explicitnú alebo implicitnú súčasť formulácie problému

Procesy riešenia teoretických aj praktických problémov sú vždy – vari až na výnimočné prípady - sprevádzané požiadavkami vyhovieť rozmanitým ohraničeniam a vzťahom (väzbám) medzi entiatami a ich vlastnosťami (premennými). Je to dané tým, že fenomény reálneho sveta jestvujú vo vzájomne mnohorakých vťahoch, ktoré sú kvantitatívnej alebo kvalitatívnej povahy, resp. sú vnímané a aj hodnotené kvantitatívne alebo kvalitatívne.

Charakteristiky, stavy, chovanie reálnych fenoménov sú opisované veli•inami, resp. vlastnos•ami, ktoré (z praktických h•asísk v dy) majú ohrani•ené kvantitatívne •i kvalitatívne hodnoty. Naviac, tieto charakteristiky mô u mnohorakým spôsobom vzájomne súvisie•, teda by• vzájomne viazané. Ide o javy, ktoré sú vlastné realite, sú jej inherentnou sú•as•ou. Pri riešení praktických problémov nie je mo né ich obchádza•.

Z uvedeného vyplýva, e symbolová reprezentácia ohrani•ení/väzieb, ktoré majú v jednotlivých problémových oblastiach významnú a •asto uplat•ovanú úlohu majú by• prostredníctvom vhodne zvoleného symbolizmu sú•as•ou zodpovedajúcich báz znalostí. Vyplýva to aj z toho, e **ohrani•enia/väzby mô u tvori• integrálnu *implicitnú* alebo *explicitnú* sú•as• formulácií a riešení problémov.** V oboch prípadoch **vymedzujú po iadavky na •iastkové aj globálne ciele (výsledky) riešení a/alebo na spôsoby ich dosahovania (realizácií riešiacich postupov).**

Explicitné a implicitné ohraničenia a väzby

Kým **explicitne** formulované ohraničenia a väzby tvoria (sú vyjadrené ako) súčasť špecifikácie riešeného problému, **implicitné** sú pova ované za všeobecne známe a preto pri formulácii problému nebývajú deklarované. Bez ich vhodného reflektovania v reprezentácii znalostí by sa však nemohli zohľadňovať. Je to netriviálna problematika a otázka rozsahu rerezentácie súvisiacich znalostí, rovnako ako otázka ich uplatňovania v procesoch odvodzovania, je otvorená, je vecou výskumu a vývoja.

Ilustrácire

Majme nikoľko príkladov, ktoré ilustrujú problematiku.

Explicitnými formuláciami ohraničení a väzieb môžu byť výroky typu:

- *objem valcov navrhovaného typu motora má byť viac než 1200ccm, nemá však prekročiť 1500ccm, pričom sú požadované: minimálny výkon 75 kW, maximálna rýchlosť aspoň 145km/hod, batožinový priestor minimálne 290 litrov atď.;*
- *doba odozvy digitálnej regulácie pri 20 pripojených analyzátoroch nesmie presiahnúť 50ms;*
- *pri uvažovanej liečbe sa vyžaduje neslaná nízkokalorická a na vitamíny bohatá dietoterápia.*

Ilustráciami implicitných (pomerne všeobecne známych) ohraničení/väzieb sú napríklad nasledujúce formulácie:

- *teplom sa telesá rozťahujú;*
- *viacbunečné organizmy potrebujú k životu kyslík;*
- *počet výskokov tanečníka za minutu je limitovaný;*
- *údržba technických zariadení vyžaduje ich jednoduchú prístupnosť a vyhovujúce technologické predpoklady (prístupové otvory, meracie miesta, montážne úchytky, atď.).*

Typy ohraničení a väzieb

Typy ohraničení a väzieb sa v princípe dajú členiť na

☞ **objektívne pôsobiace zväčša vedecky zdôvodniteľné prírodné, technické,**

ekonomické, biologické, psychické, sociálne a spoločenské zákony (zákonitosti),

☞ **výrobné, technologické, bezpečnostné, hygienické, zdravotné, organizačné, spoločenské, sociálne, právne normy, zákony, predpisy, pravidlá, zvyklosti platné vo všeobecnosti, alebo iba v určitej kulturálnej, sociálnej, spoločenskej, geografickej, technickej či inej oblasti činností človeka**[1].

Prostriedky reprezentácie ohraničení a väzieb

Symbolová reprezentácia ohraničujúcich podmienok a väzieb[2] nenaráža na principiálne ťažkosti, prirodzene musí však byť kompatibilná s prípustnými syntaktickými konštrukciami predpokladanými v danom ES, resp. zodpovedajúcej BZ. Pokiaľ aplikačná oblasť vyžaduje určitý špecifický typ reprezentačného symbolizmu, je nevyhnutné tomu prispôsobiť výber vývojového prostredia, resp. prázdneho ES.

Produkčné pravidlá

Reprezentácia formulovaných ohraničení/väzieb môže mať rôznorodú podobu, najčastejšie sa stretávame s uplatňovaním niektorých z nasledujúcich prostriedkov:

Množinové väzby

✓ **PRODUKČNÉ PRAVIDLÁ**, ktoré prostredníctvom logických operátorov a prípadne aj kvantifikátorov (vrátane tých, čo sú prvkami neklasických logík) reprezentujú väzby medzi entitami vystupujúcimi (aj v slovne formulovaných) ohraničeniach,

✓ **MNOŽINOVÉ VÝRAZY,** typov $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{x} \notin \mathbf{X}$, kde **X** je množina**,** pričom by mohla zároveň platiť aj väzba množín $\mathbf{X = R \bullet S}$, kde symbol $\bullet$ zastupuje operátor prieniku $\cap$, resp. zjednotenia $\cup$, $\mathbf{P \bullet Q}$, kde symbol $\bullet$ zastupuje niektorý z operátorov $\subset$, $\not\subset$, $\subseteq$, $=$, $\neq$, $\equiv$ ktoré vyjadrujú požiadavku, aby diskrétne hodnoty vlastností, hoci aj lingvistických, vyhovovali špecifikovaným vzťahom (ne)príslušnosti k vymedzeným množinám a vzťahom medzi množinami (triedami),

Boolovské výrazy

✓ **BOOLOVSKÉ VÝRAZY**, napr.
AND(x,y, ..., z)=TRUE, **OR(x,y, ..., z)=TRUE**, **XOR(x,y, ..., z)=TRUE**,

---

[1] Napr. stavová rovnica plynov - **p*V=k*T** - ilustrácia prírodného zákona - via e tri fyzikálne premenné a teda prípustnos• ich hodnôt vzh•adom na ich vz•ah; • prevod ozubených kolies je ur•ený pomerom ich polomerov **r**, po•tami zubov na obvodoch **n** ozubených kolies a obvodovými rýchlos•ami **v** – medzi týmito veli•inami platí vz•ah, $\mathbf{r_1/r_2 = n_1/n_2 = v_2/v_1}$, pri•om maximálny rozmer polomeru $\mathbf{r = d/2}$ sa ohrani•uje maximálnou prípustnou hodnotou $\mathbf{d_{max} = k}$ - ilustrácia zo strojárstva; • prípustný percentuálny pomer štátneho deficitu k hrubému domácemu dôchodku pre zachovanie stabilnej ekonomickej situácie je vyjadrením ur•itej ekonomickej zákonitosti; • spolo•enským/právnym ohrani•ujúcim predpisom je napr. vek školopovinnosti, právnej zodpovednosti, volite•nosti, alebo pravidlá prípustného pomenovania detí v rodine, prípustné pracovné zaradenie mladistvých a gravidných ien, spôsob zda•ovania príjmov fyzických osôb; • bezpe•nostným ohrani•ením je maximálna povolená zá•a vý•ahov, prípustné priemery vodi•ov elektrického prúdu v drevených stavbách; • medzi biologické ohrani•enia radíme hodnoty vitálnej kapacity pod•a veku, pohlavia a fyzickej trénovanosti a medzi zdravotné prípustné hodnoty radiácie, spôsob izolácie •i pracovné oprávnenia osôb s infek•ným ochorením; • príkladom organiza•ných ohrani•ení je stanovenie pracovnej doby, jej za•iatku a konca; • elektrotechnické normy predpisujú napr. v sie•ové napätie elektrických rozvodov v naších domácnostiach, ako aj dimenzovanie zodpovedajúcich isti•ov (6A, 10A, 16A); • dopravné predpisy ur•ujú povolený spôsob pou ívania komunikácií ú•astníkmi cestnej prepravy, napr. maximálne rýchlosti, hmotnosti, po•ty prepravovaných osôb at•.

2 V danom kontexte je vhodné uvies• nasledujúcu poznámku: •udský jedinec uplat•uje vo svojich ka dodenných be ných aj odborných, fyzických •i mentálnych •innostiach rad často neartikulovaných, rep. neartikulovateľných – poznatkov, ktoré nadobudol vlastnou alebo sprostredkovanou skúsenosťou. Ich súhrn, niekedy ozna•ovaný ako *prirodzený, sedliacky, •i z*emitý rozum, je zdrojom množstva **oprávnených (implicitných) ohraničení**. Napr. spravidla nie je vhodné jesť plesnivé potraviny, piť zakalenú vodu, väčšina ľudí nepreskočí výšku svojej postavy, nezdvihne teleso o hmotnosti nad 200 kg, nezabehne 100 m za čas pod 15 sekúnd a pod. Ako sa ukazuje, vyjadrovanie a reprezentovanie, **no najmä začleňovanie** takých zvyčajne nevyslovovaných, nekodifikovaných, často skôr iba tušených ohraničení, tvorí vážnu teoretickú aj praktickú problmatiku. Predpokladá sa, že hlbšie preniknutie do nej bude skôr predmetom budúcich poznávacích procesov.

požadujúce aby špecifikované literály **x,y,z** mali v prvom prípade všetky súčasne propozičnú hodnotu **TRUE**, v druhom prípade, aby aspoň jeden z nich nadobudol túto hodnotu, a v treťom prípade, aby najviac jeden z nich nadobudol hodnotu **TRUE**,

Relačné výrazy

- ✓ **RELAČNÉ VÝRAZY** vyžadujúcie, aby hodnota určitej veličiny bola kladná, záporná, nezáporná, nekladná, väčšia, menšia, nie vačšia, nie menšia, rovná danej konštantnej hodnote alebo hodnote funkcie, napr. $\mathbf{x > 0}$, $\mathbf{x \leq 37}$, $\mathbf{x < y^2}$, **...,**

Intervalové relácie

- ✓ **VÝRAZY VYMEDZUJÚCE INTERVALOVÉ RELÁCIE** medzi hodnotami uvažovaných veličín, napr. v tvare $\mathbf{x \leq y \leq z}$, kde **y** je premenná, ktorej hodnota je zdola aj zhora ohraničená konštantnými alebo premennými hodnotami **x,** resp. **z**,

Logické formuly

- ✓ **LOGICKÉ FORMULY** (aj z oboru neklasických logík) reprezentujúce rozmanité väzby, napríklad vz•ahy kauzality, •asovej súslednosti, •asti k celku, generalizácie a špecializácie,

Analytické väzby

- ✓ **ANALYTICKÉ VÝRAZY VZÁJOMNE VIAŽUCE HODNOTY PREMENNÝCH** veličín, ako napr. vo výrazoch **U=R*I**, **p*V=k*T**; výrazy tohto druhu na základe známych hodnôt buď determinujú prípustné hodnotové vzťahy medzi ostatnými, alebo priamo určujú hodnotu zostávajúcej premennej;

a splňovanie špecific-kých podmienok

- ✓ **ANALYTICKÉ VÝRAZY POŽADUJÚCE SPLNENIE ŠPECIFIKOVANEJ PODMIENKY**, napr. v tvare $\mathbf{f(y,x_1,x_2,...,x_n)=min}$ - zovšeobecnenie predošlého prípadu.[3]

Ohraničenia dátovým typom

- ✓ **VÝRAZY VYJADRUJÚCE VÄZBY DYNAMICKÝCH ZMIEN NA KVALITATÍVNEJ ÚROVNI**, povedzme taký, čo reprezentuje požiadavku splniť predpísaný vzťah, napr. $\mathbf{QZ(X)=M^+[QZ(Y)]}$, teda v danom prípade požiadavku, aby s nárastom/poklesom hodnoty jednej premennej rástla/klesala aj hodnota druhej,
- ✓ **DÁTOVÝ TYP** ohraničujúci prípustné tvary a hodnty vlastností.

Problémy s ohrani•eniami

Uvedené prípady sa nevyskytyjú s rovnakou frekvencou a ani nevylučujú výskyt iných možností reprezentácie ohraničení a vúzieb.

Na záver tejto uvádzacej časti kapitoly je potrebné zdôrazniť problémy vznikajúce s uplatňovaním sústavy reprezentovaných ohraničení/väzieb. Tie nezriedka vyvierajú z toho, že ich súčasné uplatnenie v plnom rozsahu môže viesť

- ☞ **k protichodnosti (nekonzistentnosti) a teda k nemožnosti súčasne splniť všetky požiadavky, ohraničenia, väzby,**
- ☞ **v prípade veľkého rozsahu reprezentovaných ohraničení/väzieb k ťažkostiam s pamä•ovou a najmä •asovou zlo itostos•ou vyplývajúcou z ich situa•ného preh•adávania,**
- ☞ **k náročným výpočtovým procesom súvisiacim s propagovaním ohraničení a z potenciálneho vzniku nedeterminizmov pri nevyhnutnom dynamickom zachovávaní konzistentnosti všetkých ohraničení/väzieb**,

čo vedie k nevyhnutnosti zabezpečovať

- ✓ **priebežnú kontrolu možného vzniku nekonzistentnosti medzi pozorovanými alebo odvodenými faktami a implicitne platnými ohraničeniami,**
- ✓ **priebežné odvodzovanie aktualizovaných ohraničujúcich podmienok zo známych vzťahov/väzieb medzi entitami.**

---

[3] Symboly pou ité v uvedených príkladoch sú v kontexte reprezentácie znalostí spravidla referencovaním vlastností objektov, prípadne iných údajových štruktúr vyskytujúcich sa bu• v BZ alebo údajovo-riadiacich konštruktoch ES.

Niektoré metódy a prostriedky prekonávania týchto ˇproblémov sú v súvislosti s metódami propagovania ohraničení/väzieb predmetom pozornosti v nadväzujúcom výklade.

9.1 Ohraničenia a ich propagovanie v modeli reprezentujúcom výsek skúmaného sveta

Analyticky reprezentované ohraničenia

V nasledujúcom sústredíme pozornosť iba na explicitnú reprezentáciu ohraničujúcich podmienok v tvare sústavy analyticky vyjadrených vzťahov: ROVNICE, NEROVNOSTI, INTERVALOVO DEFINOVANÉ OBORY DEFINÍCIÍ A OBORY HODNÔT PREMENNÝCH. Jedná sa o vzťahy, ktoré buď vzájomne viažu hodnoty premenných alebo vyjadrujú ich postavenie k špecifikovaným konštantám.

Také vzťahy implikujú

- možnosti odvodzovania spôsobu výpočtu hodnôt premenných (osamostatňovaním, substituovaním a ďalšími operáciami)
- a vymedzujú aj prípustné hodnoty premenných - v prípade intervalových hodnôt ohraničujú aj ich prípustné rozsahy.

Uplatňovanie zodpovedajúcich princípov a mechanizmov odvodzovania má okrem iného značný význam aj pri

Šírenie (propagovanie) ohraničení a väzieb

V nadväzujúcom texte termínom **ŠÍRENIE/PROPAGOVANIE OHRANI•ENÍ** budeme rozumieť (odvodzovací) proces,

- ☞ ktorý v sústave rovníc a nerovností **prenáša - substituuje - hodnoty** a tým zabezpečuje
  - ✓ **vypočítateľnosť ešte neznámych hodnôt premenných**,
  - ✓ **prenos ohraničeného rozsahu prípustných hodnôt premenných**, čo vyplýva z ich vzájomných väzieb implikovaných výrazom, v ktorom vystupujú,
- ☞ pričom predovšetkým na základe **separácie premenných a substituč ných operácií** - tvoriacich čiastkové kroky riešenia problému - sa **postupne odvodzujú aktuálne platné väzby medzi hodnotami premenných a vymedzujú zodpovedajúce konzistentné (neprotirečivé) rozsahy ich hodnôt**.

Triviálny ilustračný príklad: V danom kroku riešenia problému je potrebné zo závislosti

Ilustračný príklad propagácie

$$\mathbf{x=2*(a+b)} \qquad (\alpha)$$

viažucej premenné **a,b,x, a>0,** buď **bezprostredne zistiť** hodnotu premennej **x**, alebo **odvodiť spôsob**, ktorým by sa táto hodnota dala vypočítať. Keď z formulácie problému charakterizovaného sústavou rovníc/nerovností je známe, že premenné **b,r,s** sú viazané vzťahom

$$\mathbf{s+b=2*r} \qquad (\beta)$$

a že hodnoty premenných **r,s, r>s,** sú priamo merateľné, potom, ako je zrejmé, treba osamostatniť premennú **b,** čím dostávame

$$\mathbf{b=2*r-s}. \qquad (\gamma)$$

a zároveň aj

$$\mathbf{b>0}.$$

Keď vo väzbe (α) za **b** substitujeme pravú stranu **(γ)** dostávame

$$\mathbf{x=2*(2*r+a-s)}, \qquad (\delta)$$

pričom už je zrejmé, že musí platiť **x>0**. Nadväzujúci postup riešenia je podmienený aktuálnym priradením hodnoty premennej **a,** čo sa buď dá uskutočniť priamo, alebo iba *odvodením* ako a na základe čoho by sa táto hodnota dala vypočítať/zistiť (obdobne ako to bolo s premennou **b** vo vzťahoch (α) a (γ)).

Týmto triviálnym príkladom bol naznačený **ďalší rozmer inferencie –** *jeho špecifický prípad*:

Propago-vanie ako špecifický orípad od-vodzovania

PROPAGOVANIE HODNÔT, RESP. VÄZIEB PREMENNÝCH NA ZÁKLADE ZOHĽADŇOVANIA ICH VZÁJOMNÝCH VZŤAHOV (V MODELI) **VIAŽUCICH/OHRANIČUJÚCICH ICH HODNOTY.**

Inferovanie spočíva v **GENEROVANÍ REVOKOVATEĽNÝCH/REVIDOVATEĽNÝCH POSTUPNOSTÍ** (reťazení) **SUBSTITÚCIÍ TAK, ABY SA DALA ZISTIŤ HODNOTA POŽADOVANEJ PREMENNEJ, RESP. SPÔSOB VÝPOČTU TEJTO HODNOTY VYHĽADÁVANÍM VHODNÝCH A SĽUBNÝCH ZÁVISLOSTÍ A OSAMOSTATŇOVANÍM POTREBNÝCH PREMENNÝCH.**

Reprezentácia väzieb (vzťahov) hodnôt vlastností entít sústavou rovníc a/alebo nerovností sa dá ponímať ako spôsob vyjadrenia zákonitostí platných v aplikačnej oblasti a teda aj ako štruktúru hĺbkových znalostí. Treba pritom mať na mysli nasledujúce:

Sústava rovníc a nerovností v úlohe modelu reality

- Adekvátne zostavené sústavy rovníc a/alebo nerovností vytvárajú **modely** vymedzeného výseku **reality**, pričom ten istý model pripúšťa viacnásobné (líšiace sa) použitie vzhľadom na rôzne východiská a ciele riešiacích prcesov.
- Výpočet konkrétnych kvantitatívnych hodnôt premenných v modeli v rozsahu činností ES, hoci sa vôbec nevylučuje, nie je ťažiskom. Tým je **odvodenie sekvencie rovníc/nerovníc, ktoré na základe známych a zistiteľných hodnôt premenných umožňujú výpočet hodnôt premenných, ktoré sú vzhľadom na riešenú úlohu požadované**.

Najčastejšie ciele využívania sústavy rovníc a/alebo nerovníc v procese odvodzovania sú

Ciele pro-pagovania ohraničení

(1) **odvodenie neznámych hodnôt** viazaných premenných, alebo iba **postupnosti substitúcii, ktoré výpočet neznámych hodnôt umožňujú**,

(2) **kontrola vzájomnej konzistentnosti** nameraných (pozorovaných) hodnôt *premenných viazaných modelom* (vzájomná nekonzistentnosť odhadnutých či nameraných hodnôt indikuje chybné odhady, resp. chybami zažažené merania),

(3) **predikovanie (výpočet) nadobudnuteľných hodnôt** viazaných (závislých, výstupných) premenných na základe nadobudnutých/priradených hodnôt (niektorým) nezávislým vstupným premenným - jedná sa o **procesy simulácie** podporujúce rozhodovacie procesy,

(k predošlému inverzný cieľ) **výpočet hodnoty niektorých (nezávislých, vstupných) premenných z veličín, ktoré by zabezpečili požadované správanie modelovaného systému**, t.j. **požadované hodnoty závislých (výstupných) veličín** v danom čase.

9.2 Nekonzistentnosti v aplikáciach modelov a ich rezolvovanie

Nekonzistentnosti a ich rezolvovanie

Aplikácie modelov reality tvorených sústavou analytických väzieb implikujúcich určité vzťahy a ohraničenia hodnôt premenných daného modelu nezriedka narážajú na problém vzniku **nekonzistentnosti**. Ich vznik sa dá najčastejšie pripísať:

(a) **rozdielom medzi zistenými a v modeli predpokladanými skutočnosťami** (detekcia nevhodných defaultov),

(b) **chybným alebo nepresným alebo nepresným meraniam/zisťovaniam** (v prvom prípade ide o dôsledok nesprávnych, nevhodných, chybných postupov, v druhom ide o dôsledok ohraničenej presnosti použitých prostriedkov, v oboch prípadoch môže ísť aj o vplyvy podmienok a pôsobiacich okolností) ,

(c) **nekompatibilnosti súčasne požadovaných cieľov** (ide o prípady, v ktorých nie je možné súčasne splniť všetky požiadavky, zámery, teda ciele).

Default a zistené údaje

Všetky spomenuté prípady vzniku nekonzistentností môžu vyžadovať špecifické spôsoby ich ošetrenia (rezolvovania). Niekoľkými nasledujúcimi poznámkami, ktoré sa dajú považovať aj za úvod k algoritmom (makrooperáciam) opisovaným v nadväzujúcich článkoch tejto kapitoly, ich komentujeme.

- K prípadu (a): **Očakávateľné, predpokladateľné,** resp. **náhradné údaje/hodnoty** - *'defaulty'* - majú svoje uplatnenie aj v súvislosti s uvažovanými modelmi. Ich použitie, tak ako pri klasickej inferencii. Ako je už známe, sú prípustné iba kým nie sú nekonzistentné so zistenými/nameranými údajmi a tými, čo sa na ich základe odvodili. Vznik nekonzistentnosti tohto druhu sa **rezolvuje uprednostnením zistených pred predpokladanými údajmi: očakávaná hodnota sa nahradí hodnotou odvoditeľnou zo zistených/nameraných veličín.**

Nepresnosť zistení a intervalové hodnoty

- K prípadu (b): **Nekonzistentnosť vyvierajúca z chýb vyvoláva nevyhnutnosť ich eliminovať, ak však vyplýva z inherentných nepresností meraní/zisťovaní, resp. z absencie jednoznačne kategorických (bodových) hodnôt, tak sa nekonzistentnosť môže rezolvovať použitím prípustných intervalových hodnôt.** Tento nezriedkavý postup je vynucovaný tým, že často sú k dispozícii iba intervaly prípustných alternatívnych údajov - a také sú reprezentované aj v BZ[4]. Preto vznikajú situácie, v ktorých zistená/nameraná hodnota vzhľadom na väzby v modeli nie je úplne konzistentná s inými hodnotami, ktoré sa v predošlom alebo súčasne zistili/namerali.

  Výsledok merania hodnoty sa spravidla rámcuje určitým intervalom a vyjadruje sa v tvare **$x \pm \Delta x$,** pričom **Δx** udáva presnosť merania príslušného zariadenia, resp. uplatnenej metódy. Čím je metóda merania presnejšia, tým menší interval sa použije. V prípade viacerých metód zisťovania/merania hodnoty tej istej premennej môžu nastať aj nasledujúce situácie:

  (1) Výsledky sú/vedú k *disjunktívnym intervalom* hodnôt. Implikácia: buď metóda alebo meranie alebo oboje musia byť chybné.

  (2) Výsledky sú/vedú k *prekrývajúcim sa intervalom* hodnôt. Implikácia: Merania sú konzistentné, hodnotám z prieniku intervalov sa pripisuje vyššia vieryhodnosť.

---

[4] Napr. pri navrhovaní technických zariadení sa vychádza z konštruk•ných tabuliek uvádzajúcich materiálové, •i iné koeficienty v tvare prípustného rozsahu hodnôt, teda intervalom. Podobne, poznatky o ú•inkoch ur•itých liekov neumo •ujú presne predpoveda• ani •as ani intenzitu ich vplyvu po podaní istej dávky; známe sú iba zodpovedajúce intervaly a varianty mo ných ú•inkov.

Keď zisťovaná hodnota nie je merateľná, použije sa buď default (náhradný) interval, pokiaľ sa však dá, interval sa odvodzuje z hodnôt iných viazaných premenných. Prirodzene, uvažované intervaly v žiadnom prípade nesmú byť nekonzistentné s intervalmi vyplývajúcimi z prírodných zákonov, platných noriem, či predpisov, musia sa s nimi prekrývať.

Na základe kontroly konzistentnosti intervalových hodnôt je možné rozlíšiť nepresnosť od chybných meraní keď aj intervalové hodnoty sú v danom modeli vzájomne nekonzistentné, potom aspoň jedna z nameraných hodnôt je artefaktom.

Nesúlad cieľov

- K prípadu (c): **Nekompatibilita požadovaných cieľov sa dá považovať za *nekonzistentnosť preferencií*:** Riešenie problému si kladie za úlohu minimálnym počtom akcii v modeli dosiahnúť súčasne čo najviac z požadovaných cieľov. Sú však situácie, keď súčasne dosiahnutie všetkých požadovaných cieľov je v princípe nemožné.

  Nekompatibilitu požiadaviek a cieľov možno rezolvovať nasledujúcimi prostriedkami (a aj ich kombináciami)

  - PRIORITAMI - **keď požiadavku splňovania väzieb a nimi implikovaných ohraničení je možné usporiadať podľa ich významu a dôležitosti,**
  - INTERVALMI - **keď sa nimi nahradia bodové hodnoty, znižuje sa pravdepodobnosť vzniku nekompatibilít,**
  - RELAXÁCIOU **(zmierňovaním požiadaviek) - teda kompromismi medzi ne-kompatibilitou požiadaviek s rovnakou prioritou**.

Lokálna a celková chyba

Keď sa pri *šírení ohrani•ení* vo vzťahoch tvoriacich model nahradzujú presné (ostré, bodové) hodnoty hodnotami intervalovými, vtedy hovoríme o vzniku **neostrých väzieb**. Sú charakterizované parametrom nazývaným alternatívne **MIERA NESPLNENOSTI VÄZBY**, resp. **LOKÁLNA CHYBA VÄZBY.** Súčet lokálnych chýb všetkých väzieb modelu sa nazýva **CELKOVÁ (TOTÁLNA) CHYBA MODELU**. Spravidla sa pri **propagovaní ohraničení** uplatňuje princíp **súbežnej minimalizácie celkovej chyby**. Zabezpečuje sa to vhodnými iteračnými metódami.

Nemožnosť redukovania celkovej chyby na nulu je príznakom vzniku nekonzistentnej situácie. Možnosť minimalizácie totálnej chyby indikuje nájdenie kompromisu medzi nekonzistentnými (protirečivými) väzbami/podmienkami/požiadavkami, ktoré sa v plnom rozsahu nedajú súčasne splniť.

Minimalizácia chyby sa dá uskutočňovať súčasne s

Metódy minimalizácie chyby

- **METÓDOU PRIORÍT,** t.j. **prioritným usporiadaním a teda vzájomným uprednostňovaním jednotlivých väzieb/vzťahov na úkor tých, čo majú mižšiu prioritu** a
- **METÓDOU RELAXOVANIA,** t.j. **postupným nevyhnutným zľavovaním z po iadaviek minimalizácie lokálnej chyby v smere väzieb s ni šou prioritou, pri•om hodnoty premenných vypočítavané v jednotlivých krokoch propagácie zachovávajú konzistentnosť s väzbami vyššej priority**.

V súvislosti s uplatňovaním metódy minimalizácie chýb treba mať na mysli, že

- voľba hodnoty premennej v konkrétnom kroku iterácie závisí od aktuálnych hodnôt ostatných viazaných premenných a preto **nemožno metódu minimalizácie a metódu propagovania ohraničení paralelizovať**,

- proces minimalizácie totálnej chyby, ktorá je funkciou všetkých premenných, môže dosiahnúť **lokálne namiesto globálneho minima**.

Pri konkrétnych výpočtových metódach, ktoré sa uplatňujú pri implementovaní naznačených postupov je dôležité zohľadňovať *vlastnosti premenných aplikačnej oblasti*. Najmä či ich hodnoty sú symbolové alebo numerické, diskrétne alebo spojité, či počet prípustných hodnôt je konečný alebo nekonečný. V prípade numerických hodnôt vhodné metódy iterácii sa opierajú o metódy numerickej matematiky.

9.3 *Splňovanie ohraničení - uvedenie problematiky*

Splňovanie ohrani-čení

SPLŇOVANIE OHRANIČENÍ (SO)
je proces riešenia sústavy rovníc a nerovností, ktorý odvodzuje buď hodnotu požadovanej/požadovaných premenných na základe tých, čo majú hodnoty zadané, už známe, alebo zistiteľné a tiež (najmä) **odvodzovania postupu, ktorým by sa tieto hodnoty dali vypočítať.**

Splňovanie ohraničení je úloha vymedzená trojicou

SO = ⟨M,Z,P⟩,

v ktorej

M - symbolizuje *množinu ohraničení/väzieb* (v podobe sústavy rovníc a nerovností), ktoré tvoria **model**,

Z - je *množina premenných* v modeli, *ktorých hodnota je známa* a

P - *množina premenných, ktorých hodnota nie je známa, ale je požadovaná.*

Proces splňovania ohraničení

Ide teda o proces, v ktorom na základe známych (vypočítateľných) hodnôt premenných z množiny Z sa v danom systéme rovníc a nerovností (väzieb) tvoriacich model, odvodzujú neznáme hodnoty premenných tvoriacich prvky množiny P.

Ilustráciou významu uvedených symbolov je prípad modelu **M = {a=b+c}** tvoreného jedinou rovnicou. Ak by hodnoty premenných **a,c** boli známe či zistiteľné a bola by definovaná požiadavka na ich základe zistiť neznámu hodnotu premennj **b,** tak by sme podľa vyššie zavedenej notácie mohli písať **Z={a,c}** a **P={b}**, z čoho by plynul nasledujúci zápis

SO = ⟨{a=b+c}, {a,c}, {b}⟩.

V nasledujúcom uvažujeme jeden z prístupov k **algoritmu šírenia ohraničení**. Popri už vyššie uvedených symboloch **M**, **Z**, **P** použijeme ešte nasledujúce:

W - symbolizuje množinu ľubovoľných výrazov typu rovnica/nerovnica,

var - symbolizuje funkciu, ktorej argumentom je entita typu **W;** funkcia **var(W)** vráti ako svoju hodnotu množinu premenných $\{\xi_i\}$ vyskytujúcich sa vo **W;** keď všeobecná entita **W** tvorí model uvažovaného výseku reality, vtedy píšeme radšej **var(M),** čo by v prípade vyššie uvedeného ilustračného príkladu vrátilo premenné **a,b,c**;

N - symbolizuje podmnožinu premenných z modelu, ktorých hodnota je neznáma, možno písať **N = var(M) - Z**;

Q - symbolizuje tú podmnožinu premenných z modelu, ktorých hodnota je neznáma a pri formulácii problému splňovania ohraničení ich hodnota nie je ani požadovaná, píšeme **Q = N - P = var(M) - (Z + P)**.

Východiskom riešenia problému splňovania ohraničení je **SPLNENIE ELEMENTÁRNEHO OHRANIČENIA (SEO).** Rozumie sa tým prípad výskytu premennej $\xi \in$ **N** vo výraze, v ktorom

Splňovanie elementárneho ohraničenia

(1) **zachovávajúc konzistentnosť daného výrazu sa dá na základe všetkých ostatných premenných vo výraze patriacich zároveň aj do množiny Z priradiť premennej ξ hodnota,**
(2) **alebo sa premenná $\xi \in$ N dá osamostatniť a teda vyjadriť v tvare $\xi = \tau$, pričom τ je výraz, pre ktorý**
   - ✓ **buď platí, že každý prvok množiny var(τ) je prvkom množiny Z,**
   - ✓ **alebo v množine generovanej funkciou var(τ)={ξ_i} popri prvkoch $\xi_i \in$Z jestvujú aj prvky $\xi_j \in$N, pre ktoré je odvodený alebo odvoditeľný výraz v tvare $\xi_j = \tau'$ taký, že $\xi_j \in$ var(τ').**

Premenná s takto vypočítanou, alebo vypočítateľnou hodnotou sa následne preradí z množiny **N** do množiny **Z**.

Uvedené nazna•uje základný princíp cieleného procesu generovania sekvencie spl•ovania elementárnych ohrani•ení na základe postupného zis•ovania neznámych hodnôt premenných, resp. ur•ovania z •oho sa dajú vypo•íta•. Je to proces, ktorý sa nazýva **PROPAGOVANIE (ŠÍRENIE) OHRANI•ENÍ/VÄZIEB**.

Keď je to potrebné, tento proces sa kombinuje (modifikuje) ďaľšími metódami: *prioritami, intervalmi, relaxáciou*, čo je témou nasledujúcich článkov.

9.4 *Splňovanie ohraničení - metóda symbolového prepisovania*

Metóda symbolového prepisovania zodpovedá GLOBÁLNEMU ŠÍRENIU (PROPAGOVANIU) OHRANIČENÍ.

Na rozdiel od elementárneho (lokálneho) splňovania ohraničení, jeho prednosť spočíva v spôsobilosti ošetriť 'cyklické' ohraničenia. Predpokladom toho však sú dostatočné bohaté algoritmy stelesňujúce matematické metódy osamostatňovania premenných a symbolového prepisovania väzieb vyskytujúcich sa v modeli.

Uvádzaná metóda (aj jej mutácie) sa týka modelov obsahujúcich premenné, ktoré nadobúdajú kvantitatívne a spojité hodnoty, teda rozsah oboru ich hodnôt je nekonečný, prakticky však, aj vzhľadom na **revízie** riešiaceho postupu (**backtracking**), uvažuje sa len s konečným počtom hodnôt.

9.4.1 *Základný princíp symbolového prepisovania*

Na báze vyššie vymedzeného **splňovania ohraničení - SO** sa dá zostrojiť algoritmus propagovania ohraničení. Najjednoduchší variant tohto algoritmu symbolovo označíme

Algoritmus propagovania ohraničení

SO(M,Z,P,R,O).

Jeho vstupnými parametrami sú **M,Z,P** - vo vyššie uvedenom význame. Symboly **R,O** zodpovedajú výstupným parametrom. Majú nasledujúci význam

R - reprezentuje dynamicky sa meniacu (pozri v ďaľšom) množinu vzťahov typu **ξ=τ**, v ktorých platí

- $\xi \in$ **P**

- a v priebehu riešiaceho procesu aj
  $\exists\xi^* \in$ **var(τ) &** $\xi^* \in$ **Z** a
  $\exists\xi^+ \in$ **var(τ) &** $\xi^+ \in$ **Q**,
  pričom v koncovom stave riešenia platí už iba
  $\forall\sigma(\sigma \in$ **var(τ) &** $\sigma \in$ **Z)** a tiež **kard(R)=kard(P)**;

O - priebežne reprezentuje dynamickú množinu vzťahov typu ξ ⊙ **τ**, kde
- ξ je premenná,
- ⊙ zastupuje jeden z nasledujúcich relačných operátorov: **>**, ≥, **=**, ≠, ≤, **<**,
- **τ** je výraz, tvorený konštantami a/alebo
  - v priebehu riešiaceho procesu prvkami z množín **Z** a **Q**,
  - v koncovom stave procesu už iba prvkami z množiny **Z,** naviac však v koncovom stave dochádza aj k zjednoteniu množín **O**∪**O'**, čím **O** obsahuje popri práve vymedzených výrazoch ξ ⊙ **τ** aj také, v ktorých sa postupne substitúciami aktualizovali tieto ohraničujúce väzby (je to zabezpečované v množine ohraničení **O'**, ktorej sa vykonávajú substitúcie – pozri nižšie uvedený algoritmus);

a väzby z **O** sa využívajú na testovanie toho, či vstupné hodnoty sú konzistentné s väzbami v modeli - v prípade nekonzistentnosti, riešenia z **R** nie sú použiteľné.

Pracovnými premennými algoritmu sú

V - symbolizuje dynamickú množinu výrazov typu rovnica/nerovnosť; v počiatočnom stave vykonávania algoritmu platí **V=M**; v procese riešenia problému kardinalita tejto množiny monotónne klesá, lebo sa z nej postupne odstraňujú vzťahy, v ktorých sa úspešne vykonalo splnenie elementárneho ohraničenia, t.j. operácia osamostatnenia vybranej premennej ξ,

v - symbolizuje prvok množiny **V**, je to teda väzba typu rovnica/nerovnosť, pre ktorú platí **v** ∈ **V**,

T - je dynamická množina obsahujúca premenné s neznámou a požadovanou hodnotou; v počiatočnom stave vykonávania algoritmu platí **T=P**, v priebehu riešiaceho postupu prvkami množiny **T** sa možu stať aj také premenné z **Q**, ktorých hodnotu je nevyhnutné odvodiť kvôli procesu propagovania ohraničení vyvolaného niektorou z premenných v **P**, v koncovom stave procesu štandardne platí **T=**∅**,**

S - symbolizuje dynamickú pracovnú údajovú štruktúra, v ktorej sa v priebehu propagovania ohraničení uchováva **stopa uskutočňovaných elementárnych ohraničení, t.j. osamostatnení ξ=τ,** a následných **substitúcií**, píšeme

$$\mathbf{S} \equiv \{\xi_1=\tau_1, \xi_2=\tau_2, ...\};$$

jedná sa o špecificky druh **protokolu,** ktorý okrem vysvetľovacieho mechanizmu môže slúžiť aj zabezpečovaniu odstúpenia od prebiehajúceho riešenia a následnej rekonštrukcii zodpovedajúceho predchádzajúceho stavu riešenia problému.

Funkcia algoritmu propagovania ohraničení spočíva na troch kľúčových operáciach:

Kľúčové operácie zabezpeču-

(1) **Heuristická procedúra VÝBER spočívajúca na heuristickej operácii výberu niektorej rovnice/nerovnice** (väzby) **v = VÝBER(V)** a v rámci nej **výberu**

júce funkcie algoritmu propagovania

niektorej premennej ξ = VÝBER(T) & ξ∈var(v). Najprv teda ide o výber konkrétnej rovnice/nerovnice z množiny ešte neošetrených väzieb modelu **M**, v ktorej sa vyskytuje aspoň jedna premenná ξ z pôvodnej množiny **P**, a následne aj z množiny **T** s dynamickým obsahom**.** Všeobecne uplatniteľné efektívne metódy pre také výbery nie sú (autorovi týchto textov) známe, ani o uplatniteľných heuristikách výberu sa vo všeobecnosti nedá vopred vedieť, či patria medzi najsľubnejšie – voľba heuristík je výrazne podmienená aplikačnou oblasťou (a invenciou implementátorov systému). Často sa javí výhodným uprednostňovanie výberu tých **v**, resp. ξ, ktoré minimalizujú počet nadväzujúcich operácií osamostatňovania; núdzovým riešením môže byť postupný (sekvenčný) alebo náhodilý výber výrazov a premenných v nich.

(2) **Procedúra OSAMOSTATNI(v,N,ξ,τ), ktorá korešponduje so splňovním elementárneho ohraničenia**. Jej vstupnými parametrami sú **v, N,** ξ a výstupom je **τ** zo vzťahu ξ = **τ**. Predchádza jej voľba väzby **v** a výber premennej ξ v nej**.** Pokiaľ sa vo väzbe nachádza viac premenných patriacich do **P**, resp. **T,** výber môže byť opäť heuristicky (spravidla sa uprednostňujú také **v**, z ktorých po osamostatnení ξ vzniká výraz **τ** obsahujúci iba premenné s už známou alebo vypočítateľnou hodnotou).

(3) **Procedúra algoritmicky jednoduchých substitučných operácií** – symbolovo **W°[ξ=τ] -** čo znamená, že každý výskyt ξ v množine výrazov **W** sa nahradí výrazom **τ.** Uplatňuje sa iba vtedy, keď procedúra splňovania elementárnych ohraničení úspešne vráti (novoodvodenú) väzbu ξ=**τ**. **Substituovanie je proces zabezpečujúci globálne šírenie ohraničení.** Vzťahuje sa to aj na prípady, v ktorých ξ nie je prvkom množiny **P**. Prirodzene, substitučné operácie sa neaplikujú na množinu **S**, ktorá iba registruje postupnosť uplatneených operácií.

Princíp algoritmu propagovania ohraničení sa dá vyjadriť v nasledujúcej podobe:

Koncepcia algoritmu propagovania ohraničení

ALGORITMUS SO(M,Z,P,R,O)

začni
R:=∅, S:=∅, O:=∅, O':=∅, V:=M, T:= P
***kým* V≠∅ & T≠∅ rob**
v:=VÝBER(V)
ak ¬∃ξ (ξ∈var(v) & ξ∈T) tak *koniec_kým*
V:=V\{v}
ξ:=VYBER(T)
ak OSAMOSTATNI(v,N,ξ,τ) – splnené pre **∃ψ(ψ∈{var(τ)}&ψ∈N)**
tak R:=R°[ξ=τ], O':=O'°[ξ=τ]
    T:=(T-ξ)∪(var(τ)\Z),
    V:=V°[ξ=τ],
    ak ξ∈P, tak R:=R∪{ξ=τ}
inak O:=O∪{ξ=τ}, O':=O'∪{ξ=τ}
S:=S∪{ξ=τ}
koniec_kým
O:=O∪O'
koniec

Vysvetľujúci komentár:

Komentár k algoritmu SO

Krok (2) je inicializačný. V ňom sa vytvárajú výstupné **R**,**O** a pracovné množiny **O'**, **S**, **V**, **T**.

Krok (3) je hlavička cyklu ***kým***, v ktorom sa zabezpečuje výber a testovanie jednak jednotlivých väzieb, ako aj požadovaných, resp. potrebných premenných; cyklus sa zastaví buď po vyčerpaní všetkých prvkov množiny **V,** alebo po zistení/odvodení všetkých požadovaných a potrebných premenných.

Krok (4) zabezpečuje výber väzby **v** $\in$**V** buď na základe určitej heuristiky, alebo náhodilým či sekvenčným postupom**.**

Krok (5) testuje, či sa vo vybratej väzbe vyskytuje premenná s neznámou hodnotou z množiny **T**; pokiaľ tomu tak nie je, vyberie sa iná väzba. V opačnom prípade sa väzba **v** odstráni z **V** v nadväzujúcom kroku (6).

Následne v kroku (7) sa vyberá - metódami ako v prípade výberu väzby – premenná $\xi \in$ **var(v)** taká, že $\xi \in$ **T,** na ktorú sa potom aplikuje proces osamostatňovania.

Krok (8) volá procedúru **OSAMOSTATNI(v,N,ξ,τ)**, ktorá vo všeobecnosti môže byť veľmi komplexná a slúži osamostatňovaniu vybretej premennej ξ; po úspešnom osamostatnení testuje či sa v pravostrannom výraze vyskytuje prvok z množiny **N**. Ak je podmienka splnená, tak sa pokračuje nadväzujúcimi krokmi, v opačnom prípade, t.j. keď $\boldsymbol{\tau}$ už neobsahuje žiadnu neznámu premennú, podmienka nie je splnená a výraz **v** sa premiestni z **V** do **O** (krok 13).

Splnená podmienka v kroku (8) vyvolá v kroku (9) procesy substituovania: všetky doterajšie výskyty práve osamostatnenej premennej $\xi = \boldsymbol{\tau}$ na pravej strane väzieb v množinách **R** a **O'** sa nahradia zodpovedajúcimi práve odvodenými pravými stranami $\boldsymbol{\tau}$. Množina **O'** kumuluje všetky väzby pôvodne obsahujúce na pravej strane iba známe hodnoty s tým, že sa substitúciami (produktami procedúry **OSAMOSTATNI**) sústavne aktualizuje.

Následne v kroku (10) sa aktualizuje pracovná množina **T**: odstráni sa z nej premenná z ľavej strany výrazu $\xi = \boldsymbol{\tau}$ a pridajú sa premenné z $\boldsymbol{\tau}$**,** ktorých hodnota je neznáma.

Krok (11), obdobne ako krok (9), zabezpečuje substitúcie $\xi = \boldsymbol{\tau}$ v množine **V.** Produktom substitúcie je nahradenie všetkých výskytov premennej ξ vo výrazoch vo **V** výrazom $\boldsymbol{\tau}$.

Krok (12) testuje, či osamostatnená premenná je požadovaná, t.j. či platí $\xi \in$**P**; ak je test splnený, tak sa výraz $\xi = \boldsymbol{\tau}$ zaradí medzi prvky množiny **R**. Sled týchto krokov pokračuje krokom (14).

Krok (13) sa vykonáva iba keď podmienka v kroku (8) nie je splnená, vtedy sa aktualizuje obsah oboch mutácií množín ohraničení o nový prvok.

Krok (14) sa vykoná vždy a slúži doplňovaniu usporiadanej množiny **S** o výrazy typu $\xi = \boldsymbol{\tau}$, čím táto množina vytvára vlastne stopu postupu propagovania. Množiny **S** a **O'** sú predovšetkým prostriedkom nemonotónneho propagovania (odvodzovania) a teda odstupovania od prebiehajúceho procesu (backtrakingu).

Krok (15) ukončuje cyklus a krok (16) vytvára výslednu podobu množiny **O,** ktorej obsah bude jednak sústava všetkých identifikovaných väzieb so známymi hodnotami na pravej strane ako aj všetkých tých väzieb z nich, v ktorých sa vykonali substitúcie.

Poslaním tohto algoritmu je vygenerovať množinu **R** obsahujúcu iba výrazy $\xi=\tau$ pre $\xi\in$**P,** v ktorých všetky τ obsahujú iba premenné so známou alebo vypočítateľnou hodnotou na základe obsahu množiny **Z** a zároveň aj množiny ohraničení **O,** ktorej prvky vymedzujú (ne)prípustné hodnoty premených a ich vzájomné vzťahy.

Ešte je potrebné uviesť dve významné poznámky:

1. Poslanie niektorých prvkov štruktúry uvedeného algoritmu nemusí byť zrejmé. Ide o množiny **O**, **M** a **S**. Ich použitie vyplýva z toho, že uvažovaný algoritmus sa uplatňuje v kontexte iných procesov. Najmä v súvislosti s funkčne rozšírenými algoritmami propagovania premenných (pozri aj v ďalšom). Naviac, keďže cielené (je to determinované obsahom množín **P** a **Z**) propagovanie ohraničení nemusí byť monotónne, množina **S,** čo je odvodzovacia stopa, je prostriedkom umožňujúcim okrem iného zabezpečiť *backtracking,* t.j. revidovanie prebiehajúceho riešenia (uvedený algoritmus túto funkčnosť neuvažuje).
2. Konceptuálna a implementačná zložitosť realizácie algoritmu je zrejmá. Jestvuje však už dostatočné množstvo príkladov potvrdzujúcich realizovateľnosť príslušných implementácií[5]. Tvorba procedúry predpokladá dostatočné znalosti zo zodpovedajúcich oblastí matematiky a vhodné ohraničenie typov uvažovaných väzieb danej aplikačnej oblasti.

Nasleduje ilustračný príklad.

Majme jednoduchý model, na ktorom demonštrujeme uplatňovanie uvedeného algoritmu:

Ilustračný príklad

Zadaný model

1. **s + f = 2r + e**
2. **d - e = a + f**
3. **a = 2bd + c**
4. **r + d = a - 1/b**
5. **c + f = bd**
6. **1/b = 4d**
7. **b ≠ 0**
8. **d ≠ 0**

Nech je **Z = {r,s}**, t.j. hodnoty premenných **r** a **s** sú známe, hodnoty premenných v množine **N = {a,b,c,d,e,f}** sú neznáme a hodnota premennej **b** je požadovaná, t.j. **P={b}**.

Vstupné parametre

Naštartovanie procedúry spôsobuje vytvorenie prázdnych množín *riešenia* **R,** *postupu/stopy riešenia* **S** a *ohraničujúcich podmienok* **O a O'**, ďalej vytvorenie množiny **V**, t.j. pracovnej kópie väzieb tvoriacich model, a množiny **T** ako kópie požadovaných premenných. Nadväzne sa spúšťa cyklus, v ktorom sa postupne spracúvajú väzby **v**$\in$**V**. Vedie to k potrebe vykonať výber niektorej väzby **v** a v nej obsahnutej premennej z **T**. V danom prípade je to premenná **b**. Výber je vo všeobecnosti nedeterministický. Z hľadiska rozboru uvažovaného algoritmu spôsob uskutočnenia vý-

[5] Typickou uká kou je známy a slávny systém MACSYMA schopný uskuto••ova• ve•mi náro•né analytické operácie na symbolovej úrovni.

beru je irelevantný. Nech vzhľadom na jednoduchosť väzby **7.** sa tá stane argumentom procedúry **OSAMOSTATNI**, t.j.

$\mathbf{v \equiv b \neq 0}$,

čo spôsobuje odstránenie tejto negovanej rovnosti z **V** (odstránenie väzby je symbolizované znakom Ω). Jediné možné priradenie je **ξ:=b** a následne sa volá procedúra **OSAMOSTATNI.** Ako je zrejmé, podmienka v kroku (8) nie je splnená a preto sa väzba **7.** zaradí do množiny **O**. Aktualizovaná množina **V** nadobúda tvar

1. $\mathbf{s + f = 2r + e}$
2. $\mathbf{d - e = a + f}$
3. $\mathbf{a = 2bd + c}$
4. $\mathbf{r + d = a - 1/b}$
5. $\mathbf{c + f = bd}$
6. $\mathbf{1/b = 4d}$
7. Ω
8. $\mathbf{d \neq 0}$

a množiny **O, O', S** nadobudnú tvar $\mathbf{O=\{b\neq 0\}, O'=\{b\neq 0\}, S=\{b\neq 0\}}$.

Nech následne podľa rovnakej stratégie je vybratá rovnica **6.** Tá sa odstráni z **V** a volá sa procedúra **OSAMOSTATNI.** V nej táto rovnica tvorí vstupný argument. Podmienka, v ktorej procedúra vystupuje, je teraz splnená a jej výstupom je

$\mathbf{b=1/4d}$.

Následne sa vykonajú operácie

$\mathbf{R=R^o[b=1/4d] = \{0\}^o[b=1/4d] = \{0\}}$
$\mathbf{O'= \{b\neq 0\}^o[b=1/4d] = \{1/4d\neq 0\}}$

a aktualizuje sa množina **T,** ktorej obsahom sa stáva **{d}**.

Pokračuje sa aktualizáciou množiny $\mathbf{V = V^o[\xi=\tau]}$, čím dostávame

1. $\mathbf{s + f = 2r + e}$
2. $\mathbf{d - e = a + f}$
3. $\mathbf{a = 1/2 + c}$
4. $\mathbf{r + d = a - 4d}$
5. $\mathbf{c + f = 1/4}$
6. Ω
7. Ω
8. $\mathbf{d\neq 0}$

Nasleduje krok (12), v ktorom sa testuje platnosť $\mathbf{\xi\in P}$. Keďže $\mathbf{\xi=b\in P}$, podmienka je splnená a preto sa vykoná **tak** časť tohto kroku. Tým dostávame

$\mathbf{R=R\cup\{b=1/4d\}=\{0\}\cup\{b=1/4d\}=\{b=1/4d\}}$.

Napokon sa v kroku (14) aktualizuje stopa propagácie (odvodzovania)

$\mathbf{S = S \cup \{b=1/4d\} = \{b \neq 0, b=1/4d\}}$,

čím sa končí tento priebeh cyklu.

Keďže v nasledujúcom kroku sa stáva predmetom záujmu premenná **d**, podľa stratégie "jednoduchosti" mohlo by nastať $\mathbf{v \equiv d \neq 0}$, čo analogicky s predchádzajúcim ohraničením (prvý priebeh cyklu) spôsobí presun tohto výrazu do množín **O** a **O'**, ako aj aktualizáciu množiny **S**

$\mathbf{O = \{b \neq 0\} \cup \{d \neq 0\} = \{b \neq 0, d \neq 0\}}$, $\mathbf{O' = \{1/4d \neq 0\} \cup \{d \neq 0\} = \{1/4d \neq 0, d \neq 0\}}$
$\mathbf{S = S \cup \{b=1/4d\} = \{b \neq 0, b=1/4d, d \neq 0\}}$.

Produktom kroku (6) je nasledujúca podoba množiny **V**

1. $\mathbf{s + f = 2r + e}$
2. $\mathbf{d - e = a + f}$
3. $\mathbf{a = 1/2 + c}$
4. $\mathbf{r + d = a - 4d}$
5. $\mathbf{c + f = 1/4}$
6. Ω
7. Ω
8. Ω

Nech v nadväzujúcom priebehu cyklu výber väzby spôsobí
$\mathbf{v \equiv d - e = a + f}$,

na ktorý procedúra **OSAMOSTATNI** reaguje výrazom

$\mathbf{d = a + e + f}$.

Má to za následok

$\mathbf{R = R^{o}[d=a+e+f] = \{b=1/4d\}^{o}[d=a+e+f] = \{b=1/4(a+e+f)\}}$
$\mathbf{O' = \{1/4d \neq 0, d \neq 0\}^{o}[d=a+e+f] = \{1/4(a+e+f) \neq 0, (a+e+f) \neq 0\}}$,
$\mathbf{T = \{a,e,f\}}$

vrátane substituovaním aktualizovanej množiny **V**

1. $\mathbf{s + f = 2r + e}$
2. Ω
3. $\mathbf{a = 1/2 + c}$
4. $\mathbf{r + 4a + 5e + 5f = 0}$ (po zjednodušení)
5. $\mathbf{c + f = 1/4}$
6. Ω
7. Ω
8. Ω

Keďže **d** nie je prvkom množiny **P,** krok (12) nesposobí zmenu obsahu množiny **P**, nasleduje krok (14)

$\mathbf{S = S \cup \{d=a+e+f\} = \{b \neq 0, b=1/4d, d \neq 0, d=a+e+f\}}$.

V prípade, že v nasledujúcom priebehu cyklu **VYBER** vloží rovnicu **3.** do úlohy argumentu procedúry **OSAMOSTATNI**, je zrejme, že rovnicu netreba upravovať, stáva sa jej výsledkom. Takže máme

$\mathbf{R=\{b=1/4(a+e+f)\}^o[a=1/2+c] = \{b=1/4(1/2 +c+e+f)\}}$
$\mathbf{O'=\{1/4(a+e+f)\neq 0, (a+e+f)\neq 0\}^o[a=1/2+c]=\{1/4(1/2 +c+e+f)\neq 0, (1/2+c+e+f)\neq 0\},}$
$\mathbf{T=\{c,e,f\},}$

1. $\mathbf{s + f = 2r + e}$
2. Ω
3. Ω
4. $\mathbf{r + 2 + 4c + 5e + 5f = 0}$ (po zjednodušení)
5. $\mathbf{c + f = 1/4}$
6. Ω
7. Ω
8. Ω

obsah množiny **R** sa nerozširuje,

$\mathbf{S = S\cup\{a=1/2+c\} = \{b \neq 0, b=1/4d, d\neq 0, d=a+e+f, a=1/2+c\}}$

Ďalej nech je

$\mathbf{v \equiv c + f = 1/4,}$

z čoho plynie (po príslušných úpravách)

$\mathbf{c = 1/4-f}$
$\mathbf{R = \{b=1/4(1/2 +c+e+f)\}^o[c=1/4-f]= \{b=1/4(1/2+1/4-f+e+f)\}= \{b = 3/16 + e/4\}}$
$\mathbf{O'=\{1/4(1/2+c+e+f)\neq 0, (1/2+c+e+f)\neq 0\}^o[c=1/4-f]=}$
$\mathbf{=\{1/4(1/2 +1/4-f+e+f)\neq 0, (1/2+1/4-f+e+f)\neq 0\} = \{(3/16 + e/4)\neq 0, (3/4+e)\neq 0\}}$
$\mathbf{T = \{e,f\}}$.

a tiež

1. $\mathbf{s+f = 2r+e}$
2. Ω
3. Ω
4. $\mathbf{r+3+5e+f = 0}$ (po zjednodušení)
5. Ω
6. Ω
7. Ω
8. Ω

ako aj

$\mathbf{S = S\cup\{c=1/4-f\} = \{b \neq 0, b=1/4d, d\neq 0, d=a+e+f, a=1/2+c, c=1/4-f\}}$

Ak teraz bude

$\mathbf{v\equiv s+f=2r+e}$,

predpokladajme, že **OSAMOSTATNI** vráti

$e=s+f-2r$ (rovnako by mohol vrátiť výraz pre f),

a teda dostávame

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{R} = \{b = 3/16 + e/4\}^{\circ}[e=s+f-2r]=\{b = 3/16 + s/4 + f/4 - r/2\}\\
&\mathbf{O'} = \{(3/16 + e/4)\neq 0,\ (3/4+e)\neq 0\}^{\circ}[e=s+f-2r]=\\
&\quad = \{(3/16+s/4+f/4-r/2)\neq 0,\ (3/4+s/4+f/4-r/2)\neq 0\}\\
&\mathbf{T} = \{f\}
\end{aligned}
$$

a tiež

1. Ω
2. Ω
3. Ω
4. $3 + 5s + 6f - 9r = 0$ (po zjednodušení)
5. Ω
6. Ω
7. Ω
8. Ω

ako aj

$$\mathbf{S} = S\cup\{e=s+f-2r\} = \{b\neq 0,\ b=1/4d,\ d\neq 0,\ d=a+e+f,\ a=1/2+c,\ c=1/4-f,\ e=s+f-2r\}$$

Posledný priebeh cyklu je triviálny. Výsledkom procesu **SO** je

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{R} = \{b = 3/16+s/4+f/4-r/2\}^{\circ}[f=3r/2-5s/6-1/3]=\\
&\quad = \{b = (5+2s-6r)/48\}\\
&\mathbf{O'} = \{(3/16+s/4+f/4-r/2)\neq 0,\ (3/4+s/4+f/4-r/2)\neq 0\}^{\circ}[f=3r/2-5s/6-1/3]=\\
&\quad = \{(5+2s-6r)\neq 0,\ (16+s-3r)\neq 0\}\\
&\mathbf{S} = \{b\neq 0,\ b=1/4d,\ d\neq 0,\ d=a+e+f,\ a=1/2+c,\ c=1/4-f,\ e=s+f-2r,\ f=3r/2-5s/6-1/3\}\\
&\mathbf{O} = \{b\neq 0,\ d\neq 0,\ \{(5+2s-6r)\neq 0,\ (16+s-3r)\neq 0\}
\end{aligned}
$$

9.4.2 *Hierarchický princíp symbolového prepisovania*

Ako už bolo spomenuté, pre neidealizovanú realitu **nekompatibilita požiadaviek** (napr. na presnosť) **a cieľov** (napr. pre ohraničené zdroje alebo protichodné tendencie presnosti a nákladov) nie je výnimočná, naopak je skôr pravidlom. Preto aj praktické riešiace procesy spočívajú na zľavovaní z požiadaviek (relaxácia), pričom niektoré z požiadaviek sa uprednostňujú pred inými: **požiadavky/ciele sa hierarchizujú**. V kontexte s propagovaním ohraničení tomu zodpovedá **hierarchický princíp symbolového prepisovania.**

Hierarchické splňovanie ohraničení

HIERARCHICKÝ PRINCÍP SYMBOLOVÉHO PREPISOVANIA KOREŠPONDUJE S PRINCÍPOM HIERARCHICKÉHO SPLŇOVANIA OHRANIČENÍ - symbolovo značíme **HSO**. Na rozdiel od procedúry opísanej v predošlom článku, procedúra hierarchického symbolového prepisovania operuje nad **hierarchicky rozčlenenou sústavou**

väzieb v tvare rovníc a nerovností, t.j. nad **hierarchicky štrukturovaným modelom M**. Ten sa dá symbolovo reprezentovať v tvare

Hierarchizácia modelu

$\mathbf{M} \equiv \{\mathbf{M_1}, \mathbf{M_2}, ..., \mathbf{M_n}\}$,

kde $\mathbf{M_i}$ je množina vzťahov/väzieb, ktoré majú prioritu **i**. V tomto článku rastúca hodnota indexu implikuje klesajúcu prioritu.

Hierarchizácia spl-ňovania ohraničení

Princíp algoritmu **HSO(M,Z,P,R,O)** spočíva na modifikovaní a rozšírení princípu algoritmu **SO(M,Z,P,R,O)**. Význam argumentov sa zachováva, avšak v prípade **HSO** symbolizujú hierarchicky usporiadané väzby a im zodpovedajúce údajové štruktúry. Teda k hierarchicky rozčlenenému modelu **M** máme zodpovedajúcu hierarchiu

Princípy hierarchického splňovania ohraničení

- ✓ premenných so známou hodnotou $\mathbf{Z} \equiv \{\mathbf{Z_1}, \mathbf{Z_2}, ..., \mathbf{Z_n}\}$,
- ✓ požadovaných premenných $\mathbf{P} \equiv \{\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, ..., \mathbf{P_n}\}$,
- ✓ riešení $\mathbf{R} \equiv \{\mathbf{R_1}, \mathbf{R_2}, ..., \mathbf{R_n}\}$,
- ✓ podmienok (ohraničení) $\mathbf{O} \equiv \{\mathbf{O_1}, \mathbf{O_2}, ..., \mathbf{O_n}\}$, $\mathbf{O'} \equiv \{\mathbf{O'_1}, \mathbf{O'_2}, ..., \mathbf{O'_n}\}$.

Podstata algoritmu stelesneného procedúrou **HSO** je vyjadriteľná nasledovne:

✓ Procedúra na i-tej úrovni hierarchie, t.j. na úrovni riešení zodpovedajúcej množine $\mathbf{R_i}$, zohľadňuje iba väzby, resp. premenné na svojej a vyšších úrovniach hierarchie, t.j.

$\mathbf{M_1} \cup \mathbf{M_2} \cup ... \cup \mathbf{M_i}$, resp. $\mathbf{Z_1} \cup \mathbf{Z_2} \cup ... \cup \mathbf{Z_i}$.

✓ Pri odvodzovaní spôsobu výpočtu hodnoty požadovaných premenných na danej úrovni priority vždy sa začína uplatňovaním väzieb a premenných so známymi hodnotami, resp. známym postupom výpočtu, z úrovne najvyššej priority, teda začína sa väzbami z $\mathbf{M_1}$ a premennými zo $\mathbf{Z_1}$.

✓ Nadväzne sa pridávajú väzby a premenné z

$\mathbf{M_2}, ..., \mathbf{M_i}$, resp. $\mathbf{Z_2}, ..., \mathbf{Z_i}$.

✓ Za predpokladu, že množina hodnôt premenných

$\mathbf{Z_1} \cup \mathbf{Z_2} \cup ... \cup \mathbf{Z_i}$

vyhovuje ohraničeniam

$\mathbf{O_1} \cup \mathbf{O_2} \cup ... \cup \mathbf{O_i}$,

môžno použiť riešenia z množiny $\mathbf{R_i}$ na výpočet (odvodenie) hodnôt požadovaných premenných v $\mathbf{P_i}$.

Algoritmus hierarchizovanej propagácie ohraničení

✓ Premenné so známymi hodnotami musia vyhovovať ohraničeniam $\{\mathbf{O_j}\}$, j=1,2,...,i.

Modifikovaný algoritmus sa dá teda vyjadriť v nasledujúcom tvare

ALGORITMUS HSO(M,Z,P,R,O)

(1) začni

(2) $S:=0,\ R':=0,\ T':=0$

(3) pre $i=1$ až n rob

(4) $R_i:=0,\ T_i:=T'\cup P_i,\ O_i:=0,\ V_i:=M_i$

(5) kým $V_i\neq\emptyset\ \&\ P_i\neq\emptyset$ rob

(.6) $v:=vyber(V_i)$

(7) ak $\neg\exists\xi\ (\xi\in\{prem(v)\}\ \&\ \xi\in T_i)$ tak *koniec_kým*

(8) $V_i:=V_i-\{v\}$

(9) $\xi:=vyber(T_i)$

(10) ak OSAMOSTATNI$(v,prem(V_i)-Z_1-...-Z_i,\xi,\tau)$ – podmienka ako v **SO**

(11) tak $R':=R'^{o}[\xi=\tau],\ O'_i:=O'^{o}_i[\xi=\tau]$

(12) $T_i:=(T_i-\xi)\cup(prem(\tau)-Z_1-...-Z_i)$

(13) pre $j=i$ až n rob $V_j:=V_j^{o}[\xi=\tau]$ koniec_pre_j

(14) ak $\xi\in P_i$ tak $R':=R'\cup\{\xi=\tau\}$

(15) inak $O_i:=O_i\cup\{\xi=\tau\},\ O'_i:=O'_i\cup\{\xi=\tau\}$

(16) $S:=S\cup\{\xi=\tau\}$

(17) koniec_kým

(18) $O_i := O_i\cup O'_i$

(19) $T':=T_i$

(20) $R_i:=\{\xi=\tau \mid \{\xi=\tau\}\in R'\ \&\ prem(\tau)\subseteq\{Z_1\cup Z_2\cup...\cup Z_i\}\}$

(21) $R':=R'-R_i$

Komentár k algoritmu

(22) koniec_pre_i

(23) koniec

Vysvetlujúci komentár:

Množina **R’** uchováva priebežne generované riešenia. Po spracovaní každej úrovne priority $\mathbf{M_i}$ sa úplne rozvinuté riešenia z $\mathbf{R'}$, t.j. tie, ktoré na pravej strane rovnosti majú iba premenné patriace do množiny

$$\mathbf{Z_1\cup Z_2\cup...\cup Z_i,}$$

vložia do množiny $\mathbf{R_i}$. Podmienky (ohraničenia) identifikované v priebehu spracúvania $\mathbf{M_i}$ sa uchovávajú v množine $\mathbf{O_i}$. Množina **T’** má poistnú funkciu: cyklus **koniec_kým** sa ukončí keď sa splní hociktorá z podmienok $\mathbf{V_i\neq\emptyset}$**,** $\mathbf{P_i\neq\emptyset}$**,** pričom však množina $\mathbf{T_i}$ nemusí byť ešte prázdna, vtedy krok (19) zabezpečí prenos reziduálneho obsahu do nasledujúceho behu cyklu.

9.4.3 *Splňovanie ohraničení kombinované s hierarchickou minimalizáciou chyby*

Metóda relaxácie v hierarchickej minimalizácii chyby

Obe predchádzajúce metódy sa dajú kombinovať s **metódou minimalizácie chyby** v spojitosti s **relaxovaním (zľavovaním z) požiadaviek** na kategorickú (precíznu) konzistentnosť vzťahov v daných väzbách. **METÓDA RELAXÁCIE** sa aplikuje na množinu ohraničení **O** odvodených procedúrou **SO** alebo na hierarchiu podmienok $\mathbf{O_i}$, $\mathbf{1 \le i \le n}$, odvodených procedúrou **HSO**. Relaxáciou zistené kompromisné hodnoty premenných so známou hodnotou sa následne substitujú do riešení pre výpočet/odvodenie hodnôt požadovaných premenných.

Jednou z realizačných možností je **ALGORITMUS HIERARCHICKO-RELAXAČNÉHO SPLŇOVANIA OHRANIČENÍ - HRSO**. Symboly **M**, **Z**, resp. $\{\mathbf{M_i}\}$, $\{\mathbf{Z_i}\}$ a **P,** ktoré v ňom vystupujú, majú totožný význam ako v predchádzajúcich algoritmoch. Okrem týchto v algoritme sa uplatňuje vstupný **IL** a výstupný **OL** zoznam.

Uplatňované prostriedky

Prvkami **IL** sú množiny riešení, ktorých usporiadanie v zozname korešponduje s hierarchizáciou modelu **M,** t.j. s postupnosťou $\mathbf{M_i}$ a zodpovedajúcou štruktúrou premenných $\mathbf{Z_i}$, ktorých hodnota je známa. Prvkami **IL** sú teda množiny riešení v podobe *k-tíc* typu

$$\alpha_i = \{\xi_{i1}=c_{i1}, ..., \xi_{ik}=c_{ik}\} = \mathbf{R}_i^6,$$

v ktorých premenným $\xi_{ij} \in \mathbf{Z_1} \cup \mathbf{Z_2} \cup ... \cup \mathbf{Z_n}$ sú priradené konštanty $\mathbf{c_{ij}}$. Hodnota konštánt vznikne dosadením zistiteľných hodnôt do pravej strany výrazov $\xi_{ij}=c_{ij}$ z množiny **R**, resp. množín $\mathbf{R_i}$.

Prvkami výstupného zoznamu **OL** sú množiny β_i korešpondujúce množinám α_i z **IL** - pre každú *k-ticu* $\alpha_i \in$ **IL** obsahuje *k-ticu* (s rovnakým počtom prvkov, ktoré sa však líšia hodnotami konštánt)

$$\beta_i = \{\xi_{i1}=c'_{i1}, ..., \xi_{ik}=c'_{ik}\},$$

v ktorých premenným $\xi_i \in \mathbf{Z_1} \cup \mathbf{Z_2} \cup ... \cup \mathbf{Z_n} \cup \mathbf{P}$ sú priradené konštaty $\mathbf{c'_{ij}}$. Keďže procedúra realizujúca algoritmus **HRSO** relaxuje požiadavky (ciele), spravidla platí $\mathbf{c_{ij}} \neq \mathbf{c'_{ij}}$ pre $(\xi_{ij}=c_{ij}) \in \alpha$ a $(\xi_{ij} = c'_{ij}) \in \beta$.

ALGORITMUS HRSO(M,Z,P,IL,OL)

Princíp algoritmu hierarchicko-relaxačného splňovania ohraničení – rozšírenie algoritmu hierarchického splňovania ohraničení

```
začni
HSO(M,Z,P,R,O)
pre i=1 až n rob
    pre j=1 až k rob
    α_ij:={ξ_ij=c_ij | {ξ_ij=c_ij}∈R_i & ξ_ij∈Z_i}
    ak c_ij neobsahuje premenné
    tak O_i:=O_i ∪ α_ij
    koniec_pre_i
    HMCH(O_i+1 ∪ ... ∪ O_n, {α_1} ∪ ... ∪ {α_j-1}, β)
    β := {α_1} ∪ ... ∪ {α_j-1} ∪ β
    pre r = 1 až n rob β = β∪R^o[β]
    OL:=OL∪{β}
    koniec_pre_r
koniec_pre_i
koniec
```

Komentáre k algoritmu

$\{\alpha_{ij}\} \in$ **IL** sú *k-tice* obsahujúce riešenia **i-tej** úrovne hierarchie $\mathbf{M_i}$. Ak pre určitú úroveň priority **i** vstupy nevyhovujú ohraničeniam $\mathbf{O_1} \cup ... \cup \mathbf{O_{i-1}}$, tak

---

6 Vo všeobecnosti po•et prvkov v rôzných ***k-ticiach*** (teda na rôznych úrovniach hierarchie ***i*** je rôzny.

$\{\alpha_{ij}\} \cup ... \cup \{\alpha_{nj}\}$ a ohraničenia $\mathbf{O_j \cup ... \cup O_n}$
sa relaxujú. Ppredtým sa však každé α_{rj} pridá do $\mathbf{O_r}$, **pre** $\mathbf{j \leq r \leq n}$. Proces relaxácie sa vykoná procedúrou **HMCH(O,α,ß)** - **HIERARCHICKÁ MINIMALIZÁCIA CHYBY**. Jej vstupmi sú $\mathbf{O = O_j \cup ... \cup O_n}$, $\alpha = \{\alpha_{1j}\} \cup ... \cup \{\alpha_{i-1,j}\}$ a výstupom je β.

β priraďuje hodnoty premenným vo **var(O) - var(α)**, t.j. premennym, na ktoré sa vzťahujú ohraničenia **O**, s výnimkou tých, ktorým je hodnota určená v **α**. Hodnoty v β sú volené tak, aby sa celková chyba ohraničení **O** minimalizovala. Priraďovanie hodnôt vznikajúcich ako výsledok hierarchickej relaxácie β sa kombinuje s priradeniami hodnôt v $\{\alpha_{1j}\} \cup ... \cup \{\alpha_{i-1,j}\}$ a substituovaných v riešeniach **R** na výpočet požadovaných premenných.

Majme ilustračný problém hierarchických ohraničení

$\langle \mathbf{M_1=\{p=q, q=r\}, M_2=\{x=y, y=p, z=p\}, Z_1=\{x,z\}, P=\{r\}} \rangle$.

Predpokladajme, že procedúra **HSO(M,Z,P,R,O)** vráti množinu riešení

$\mathbf{R_1 = \{r=x\}}$ a množinu ohraničení $\mathbf{O_1 = \{x=z\}}$.

Keď $\boldsymbol{\alpha_i}$**={x=1, z=4}** je n-tica vstupných hodnôt, vtedy ohraničujúca podmienka **x=z** nie je splnená. Uvažovaná procedúra **HRSO** preto rozhodne o nevyhnutnosti relaxovať túto ohraničujúcu podmienku. Vstupné ohraničenia pre **x** a **z** sa pridajú do $\mathbf{O_1}$. Výsledok relaxácie množiny ohraničení **{x=z, x=1, z=4}** je pre celočíselné hodnoty β **= {x=2, z=3}**. Substitúcia $\mathbf{R_1}°[\beta]$ vedie k **r=2**.

Uvedená metóda relaxácie je jednou z možných. Sú známe aj iné postupy, napr. keď sa v relaxovanej množine

{x=1, z=4, x=z, y=p, z=p, p=q, q=r}

nekonzistentnosť medzi vstupnými hodnotami pre **x** a **z** rovnomerne rozdelí po všetkých väzbách - porovnajme s predošlým prípadom, keď sa uvažovali len prvé tri väzby. Rovnomerné rozdelenie by viedlo približne k

$$x = 1\frac{3}{5}, z = 3\frac{2}{5}, y = 2\frac{4}{5}, p = 2\frac{4}{5}, q = 2\frac{4}{5}, r = 2\frac{4}{5}$$

Poz-námky k metódam propagovania ohraničení

Uplatňovanú metódu je potrebné vždy prispôsobiť aplikačným požiadavkám. Záverom kapitoly je žiadúce uviesť niekoľko poznámok:

1. Rozsah, v ktorom bola uvedená problematika propagovania ohraničení, tvorí informatívny vstup pre hĺbšie, širšie aj ucelenejšie konceptuálne preniknutie do témy. Nedotkla sa napr. problematiky metód propagovania intervalových hodnôt.
2. Problematika implementácie možných odvodzovacích metód (napr. metódy sym-bolového prepisovania) nebola v kapitole obsiahnutá.
3. Vo všeobecnosti riešenie problematiky väzieb a nimi implikovaných ohraničení sa zabezpečujú procedúrami, ktoré nie sú orientované: pre alternatívne možnosti splňovania ohraničení, nejestvuje všeobecná metrika ich uprednostíovania.
4. Celá problematika využívania, zohľadňovania a propagovania ohraničení je živá a zdá sa z mnohých aspektov otvorená. Je predmetom skúmania a úvah tvorcov ES a

BZ.