Riešenie príkladu 4.2

Zostrojíme konečný automat A tak, že si v stave bude pamätať posledné štyri prečítané symboly. $A = (K, \{a, b\}, \delta, q_0, F)$, kde

$K = \{q_x | x \in \{a, b\}^*, |x| \leq 4\}$
$q_o = q_\epsilon$
F=$\{q_{bx} | x \in \{a, b\}^*, |x| = 3\}$
$\delta(q_x, d) = q_{xd}$, $\forall d \in \{a, b\}, \forall x \in \{a, b\}^*, |x| \leq 3$
$\delta(q_{cx}, d) = q_{xd}$, $\forall c, d \in \{a, b\}, \forall x \in \{a, b\}^*, |x| = 3$

Dokážeme, že $L(A) = L$, kde L je jazyk všetkých tých slov v abecede $\{a, b\}$, v ktorých štvrtý symbol od konca je b.

Nech $w \in \{a, b\}^*, w = a_1 a_2 \cdots a_n, a_i \in \{a, b\}, n \geq 0$. Automat A je deterministický, teda existuje práve jeden výpočet A na w:

$$(q_0, a_1 a_2 \cdots a_n) \vdash (q_1, a_2 \cdots a_n) \vdash \cdots \vdash (q_n, \epsilon)$$

1. Nech $n \leq 3$, t.j. $|w| \leq 3$, potom $q_n = g_x$ pre $x = a_1 a_2 \cdots a_n$ [Vyplýva z definície δ funkcie a dá sa overiť prezretím výpočtov na všetkých slovách dĺžky najviac 3.]. Žiadne také q_x nepatrí do F a teda $w \notin L(A)$. Z definície jazyka L plynie, že žiadne také w nepatrí do L.
2. Nech $n \geq 4$, t.j. $|w| \geq 4$. Potom o stavoch q_i vo výpočte A na w dokážeme indukciou:

$$\forall i \geq 4 \text{ platí } q_i = q_{a_{i-1} a_{i-2} a_{i-1} a_i} \qquad (*)$$

   (a) *Základ indukcie:*
   Pre $i = 4$ platí podľa definície δ funkcie $q_4 = q_{a_1 a_2 a_3 a_4}$, teda tvrdenie (*) pre tento prípad platí.
   (b) *Indukčný krok:*
   Nech tvrdenie (*) platí pre $i = k \geq 4$, t.j. $q_k = q_{a_{k-3} a_{k-2} a_{k-1} a_k}$. Potom podľa definície δ funkcie platí
   $q_{k+1} = \delta(q_k, a_{k+1}) = \delta(q_{a_{k-3} a_{k-2} a_{k-1} a_k}, a_{k+1}) = q_{a_{k-2} a_{k-1} a_k a_{k+1}}$ a teda tvrdenie (*) platí aj pre $i = k + 1$.

   Teda (*) platí.
   Z (*) potom pre stav q_n vyplýva že $q_n = q_{a_{n-3} a_{n-2} a_{n-1} a_n}$.
   Teda ak $w \in L$, t.j., $a_{n-3} = b$, potom $q_n \in F$ a teda $w \in L(A)$.
   Ak $w \in L(A)$, teda $q_n \in F$, potom $a_{n-3} = b$ a teda $w \in L$.

Teda $L(A) = L$.