Richard Kráľovič

Tretia sada domácich úloh

Úloha č. 3.6 a):

Bezkontextová gramatika generujúca jazyk

$$L = \left\{ ww^R | w \text{ je slovo nad abecedou } \{a, b\} \right\}$$

je $G = (\{\sigma\}, \{a, b\}, P, \sigma)$, kde množina pravidiel P je:

1. $\sigma \to \varepsilon$
2. $\sigma \to a\sigma a$
3. $\sigma \to b\sigma b$

Najskôr dokážeme, že každé slovo, ktoré patrí do jazyka L, môže byť odvodené gramatikou G. Dokazovať budeme silnejšie tvrdenie, že ľubovoľné slovo tvaru ww^R alebo $w\sigma w^R$, kde w je slovo nad abecedou $\{a, b\}$, je vetnou formou gramatiky G. Dôkaz vykonáme matematickou indukciou:

1°: **Pre $|\mathbf{w}| = \mathbf{0}$:** Slovo $\varepsilon\sigma\varepsilon$ je rovné počiatočnému neterminálu. Slovo $\varepsilon\varepsilon$ môže byť odvodené gramatikou z počiatočného neterminálu pravidlom 1. Všetky slová tvaru ww^R alebo $w\sigma w^R$, kde $|w| = 0$, teda sú vetnými formami gramatiky G.

2°: **Pre $|\mathbf{w}| = \mathbf{n}$:** Predpokladajme, že všetky slová tvaru uu^R a $u\sigma u^R$, kde u je slovo nad abecedou $\{a, b\}$ a $|u| \leq n-1$, sú vetnými formami gramatiky G.

Zjavne pre ľubovoľné slovo v platí, že $(v\mathrm{a})^R = \mathrm{a}v^R$ a $(v\mathrm{b})^R = \mathrm{b}v^R$. Ľubovoľné slovo w nad abecedou $\{a, b\}$, kde $|w| = n$, sa dá zapísať v tvare $u\mathrm{a}$ alebo $u\mathrm{b}$, kde u je slovo nad abecedou $\{a, b\}$ a $|u| = n - 1$. Preto ľubovoľné slovo tvaru $w\sigma w^R$, sa dá zapísať ako $u\mathrm{a}\sigma\mathrm{a}u^R$ alebo $u\mathrm{b}\sigma\mathrm{b}u^R$, kde $|u| = n - 1$. Takéto slová môžu byť gramatikou odvodené pravidlom 2 resp. 3 zo slova $u\sigma u^R$, ktoré podľa indukčného predpokladu je vetnou formou gramatiky G. Preto aj slovo $w\sigma w^R$, kde w je slovo nad abecedou $\{a, b\}$ a $|w| = n$, je vetnou formou gramatiky G.

Ľubovoľné slovo tvaru ww^R, kde $|w| = n$, môže byť pravidlom 1 odvodené zo slova $w\sigma w^R$. O slove takéhoto tvaru sme už ukázali, že podľa indukčného predpokladu je vetnou formou gramatiky G. Preto aj slovo ww^R, kde w je slovo nad abecedou $\{a, b\}$ a $|w| = n$, je vetnou formou gramatiky G.

Dokázali sme, že gramatika G môže odvodiť všetky slová tvaru ww^R alebo $w\sigma w^R$, kde w je slovo nad abecedou $\{a, b\}$, teda aj všetky slová patriace do jazyka L. Teraz dokážeme, že každé slovo nad abecedou terminálov, ktoré gramatika G odvodí, je tvaru ww^R. Opäť budeme dokazovať silnejšie tvrdenie, že každá vetná forma gramatiky G má tvar ww^R alebo $w\sigma w^R$, kde w je slovo nad abecedou terminálov. Dôkaz opäť vykonáme matematikou indukciou:

1°: Počiatočný neterminál je σ, čo je zároveň slovo tvaru $w\sigma w^R$, kde $|w| = 0$. Všetky vetné formy, ktoré gramatika G odvodí na 0 krokov, teda majú tvar ww^R alebo $w\sigma w^R$, kde w je slovo nad abecedou terminálov.

2°: Predpokladajme, že všetky vetné formy odvodené gramatikou G na n krokov majú tvar ww^R alebo $w\sigma w^R$, kde w je slovo nad abecedou terminálov. Potom vetná forma odvodená gramatikou G na $n+1$ krokov mohla byť odvodená iba z vetnej formy tvaru $w\sigma w^R$, kde w je slovo nad abecedou terminálov. Pri tom mohla vzniknúť iba jedna z nasledujúcich možností:

1. Vetná forma bola odvodená pravidlom 1, čím vznikla vetná forma ww^R, kde kde w je slovo nad abecedou terminálov.
2. Vetná forma bola odvodená pravidlom 2, čím vznikla vetná forma $w\mathrm{a}\sigma\mathrm{a}w^R$, kde kde w je slovo nad abecedou terminálov. Táto vetná forma sa dá zapísať aj v tvare $w\mathrm{a}\sigma\,(w\mathrm{a})^R$.
3. Vetná forma bola odvodená pravidlom 3, čím vznikla vetná forma $w\mathrm{b}\sigma\mathrm{b}w^R$, kde kde w je slovo nad abecedou terminálov. Táto vetná forma sa dá zapísať aj v tvare $w\mathrm{b}\sigma\,(w\mathrm{b})^R$.

Vo všetkých troch prípadoch má vetná forma odvodená na $n+1$ krokov tvar ww^R alebo $w\sigma w^R$, kde w je slovo nad abecedou terminálov.

Dokázali sme, ze všetky slová nad abecedou terminálov, ktoré sú zároveň vetnými formami gramatiky G, patria do jazyka L. Jazyk generovaný gramatikou G je teda zhodný s jazykom L.

Úloha č. 3.6 b):

Máme daný jazyk $L = \{w | w = w^R \text{ je slovo nad abecedou} \{a, b\}\}$. Definujme jazyk $L' = \{ww^R, waw^r, wbw^r | w \text{ je slovo nad abecedou} \{a, b\}\}$. Teraz dokážeme, že jazyky L a L' sú zhodné.

Zjavne pre ľubovoľné slová u a v platí $(uv)^R = v^R u^R$. Nech slovo $u \in L'$. Potom platí jedna z nasledovných možností:

1. Slovo u je tvaru ww^R, kde w je slovo nad abecedou $\{a, b\}$. Potom platí $u^R = \left(ww^R\right)^R = \left(w^R\right)^R w^R = ww^R = u$.
2. Slovo u je tvaru waw^R, kde w je slovo nad abecedou $\{a, b\}$. Potom platí $u^R = \left(w\mathrm{a}w^R\right)^R = \left(w^R\right)^R (w\mathrm{a})^R = w\mathrm{a}^R w^R = w\mathrm{a}w^R u$.
3. Slovo u je tvaru wbw^R, kde w je slovo nad abecedou $\{a, b\}$. Potom platí $u^R = \left(w\mathrm{b}w^R\right)^R = \left(w^R\right)^R (w\mathrm{b})^R = w\mathrm{b}^R w^R = w\mathrm{b}w^R u$.

Platí teda $(\forall u)\left(u \in L' \Rightarrow u = u^R\right)$, čo je ekvivalentné s $(\forall u)\,(u \in L' \Rightarrow u \in L)$, teda $L' \subseteq L$.

Pre každé slovo $u \in L$ platí jedna z nasledovných možností:

1. Platí $|u| = 2k$, slovo u má tvar xy, kde pre slová x, y nad abecedou $\{a, b\}$ platí $|x| = |y| = k$. Kedže pre slovo u platí $u = u^R$, platí $xy = (xy)^R = y^R x^R$. Pretože zjavne platí $\left|x^R\right| = |x| = |y| = \left|y^R\right| = k$, musí platiť aj[1] $y = x^R$. Platí teda $u = xx^R$, teda $u \in L'$.

[1] Slová xy a $y^R x^R$ sú rovnaké, preto sú rovanké aj ich suffixy dĺžky k.

2. Platí $|u| = 2k+1$, slovo u má tvar $x\mathrm{a}y$, kde pre slová x, y nad abecedou $\{a, b\}$ platí $|x| = |y| = k$. Kedže pre slovo u platí $u = u^R$, platí $x\mathrm{a}y = (x\mathrm{a}y)^R = (\mathrm{a}y)^R x^R = y^R \mathrm{a} x^R$. Pretože zjavne platí $\left|x^R\right| = |x| = |y| = \left|y^R\right| = k$, musí platiť aj[2] $y = x^R$. Platí teda $u = x\mathrm{a}x^R$, teda $u \in L'$.

3. Platí $|u| = 2k+1$, slovo u má tvar $x\mathrm{b}y$, kde pre slová x, y nad abecedou $\{a, b\}$ platí $|x| = |y| = k$. Kedže pre slovo u platí $u = u^R$, platí $x\mathrm{b}y = (x\mathrm{b}y)^R = (\mathrm{b}y)^R x^R = y^R \mathrm{b} x^R$. Pretože zjavne platí $\left|x^R\right| = |x| = |y| = \left|y^R\right| = k$, musí platiť aj[3] $y = x^R$. Platí teda $u = x\mathrm{a}x^R$, teda $u \in L'$.

Platí teda $(\forall u)\,(u \in L \Rightarrow u \in L')$, teda $L \subseteq L'$. Dokázali sme teda, že $L = L'$.

Gramatiku G generujúcu jazyk L skonštruujeme nasledovne:

$$G = (\{\sigma\}, \{a, b\}, P, \sigma)$$

Pričom množina pravidiel P je nasledovná:

1. $\sigma \to \varepsilon$
2. $\sigma \to a\sigma a$
3. $\sigma \to b\sigma b$
4. $\sigma \to a$
5. $\sigma \to b$

Správnosť tejto gramatiky dokážeme podobne, ako v úlohe a). Najskôr dokážeme, že každé slovo, ktoré patrí do jazyka $L = L'$, môže byť odvodené gramatikou G. Dokazovať budeme silnejšie tvrdenie, že ľubovoľné slovo tvaru ww^R, waw^R, wbw^R alebo $w\sigma w^R$, kde w je slovo nad abecedou $\{a, b\}$, je vetnou formou gramatiky G. Dôkaz vykonáme matematickou indukciou:

1^o: **Pre $|\mathbf{w}| = \mathbf{0}$:** Slovo $\varepsilon\sigma\varepsilon$ je rovné počiatočnému neterminálu. Slovo $\varepsilon\varepsilon$ môže byť odvodené gramatikou z počiatočného neterminálu pravidlom 1. Slovo $\varepsilon\mathrm{a}\varepsilon$ môže byť odvodené gramatikou z počiatočného neterminál pravidlom 4. Slovo $\varepsilon\mathrm{b}\varepsilon$ môže byť odvodené gramatikou z počiatočného neterminál pravidlom 5. Všetky slová tvaru ww^R, waw^R, wbw^R alebo $w\sigma w^R$, kde $|w| = 0$, teda sú vetnými formami gramatiky G.

2^o: **Pre $|\mathbf{w}| = \mathbf{n}$:** Predpokladajme, že všetky slová tvaru uu^R, uau^R, ubu^R a $u\sigma u^R$, kde u je slovo nad abecedou $\{a, b\}$ a $|u| \leq n-1$, sú vetnými formami gramatiky G.

Zjavne pre ľubovoľné slovo v platí, že $(v\mathrm{a})^R = \mathrm{a}v^R$ a $(v\mathrm{b})^R = \mathrm{b}v^R$. Zjavne ak w, u sú slová nad abecedou $\{a, b\}$ platí $(\forall w : |w| = n)(\exists u : |u| = n-1)(w = u\mathrm{a}) \vee (w = u\mathrm{b})$. Preto ľubovoľné slovo tvaru $w\sigma w^R$, sa dá zapísať ako $u\mathrm{a}\sigma \mathrm{a}u^R$ alebo $u\mathrm{b}\sigma\mathrm{b}u^R$, kde $|u| = n-1$. Takéto slová môžu byť gramatikou odvodené pravidlom 2 resp. 3 zo slova $u\sigma u^R$, ktoré podľa indukčného predpokladu je vetnou formou gramatiky G. Preto aj slovo $w\sigma w^R$, kde w je slovo nad abecedou $\{a, b\}$ a $|w| = n$, je vetnou formou gramatiky G.

Ľubovoľné slovo tvaru ww^R, waw^R, resp. wbw^R, kde $|w| = n$, môže byť pravidlom 1, 4 resp. 5 odvodené zo slova $w\sigma w^R$. O slove takéhoto

[2] Slová xay a $y^R\mathrm{a}x^R$ sú rovnaké, preto sú rovanké aj ich suffixy dĺžky k.

[3] Slová xby a $y^R\mathrm{b}x^R$ sú rovnaké, preto sú rovanké aj ich suffixy dĺžky k.

tvaru sme už ukázali, že podľa indukčného predpokladu je vetnou formou gramatiky G. Preto aj slová tvaru ww^R, $w\mathrm{a}w^R$ a $w\mathrm{b}w^R$, kde w je slovo nad abecedou $\{a, b\}$ a $|w| = n$, sú vetnou formou gramatiky G.

Dokázali sme, že gramatika G môže odvodiť všetky slová patriace do jazyka $L = L'$. Teraz dokážeme, že každé slovo nad abecedou terminálov, ktoré gramatika G odvodí, je tvaru ww^R, $w\mathrm{a}w^R$ alebo $w\mathrm{b}w^R$. Opäť budeme dokazovať silnejšie tvrdenie, že každá vetná forma gramatiky G má tvar ww^R, $w\mathrm{a}w^R$, $w\mathrm{b}w^R$ alebo $w\sigma w^R$, kde w je slovo nad abecedou terminálov. Dôkaz opäť vykonáme matematikou indukciou:

1°: Počiatočný neterminál je σ, čo je zároveň slovo tvaru $w\sigma w^R$, kde $|w| = 0$. Všetky vetné formy, ktoré gramatika G odvodí na 0 krokov, teda majú tvar ww^R, $w\mathrm{a}w^R$, $w\mathrm{b}w^R$ alebo $w\sigma w^R$, kde w je slovo nad abecedou terminálov.

2°: Predpokladajme, že všetky vetné formy odvodené gramatikou G na n krokov majú tvar ww^R, $w\mathrm{a}w^R$, $w\mathrm{b}w^R$ alebo $w\sigma w^R$, kde w je slovo nad abecedou terminálov. Potom vetná forma odvodená gramatikou G na $n+1$ krokov mohla byť odvodená iba z vetnej formy tvaru $w\sigma w^R$, kde w je slovo nad abecedou terminálov. Pri tom mohla vzniknúť iba jedna z nasledujúcich možností:

1. Vetná forma bola odvodená pravidlom 1, čím vznikla vetná forma ww^R, kde kde w je slovo nad abecedou terminálov.
2. Vetná forma bola odvodená pravidlom 2, čím vznikla vetná forma $w\mathrm{a}\sigma\mathrm{a}w^R$, kde kde w je slovo nad abecedou terminálov. Táto vetná forma sa dá zapísať aj v tvare $w\mathrm{a}\sigma\left(w\mathrm{a}\right)^R$.
3. Vetná forma bola odvodená pravidlom 3, čím vznikla vetná forma $w\mathrm{b}\sigma\mathrm{b}w^R$, kde kde w je slovo nad abecedou terminálov. Táto vetná forma sa dá zapísať aj v tvare $w\mathrm{b}\sigma\left(w\mathrm{b}\right)^R$.
4. Vetná forma bola odvodená pravidlom 4, čím vznikla vetná forma $w\mathrm{a}w^R$, kde kde w je slovo nad abecedou terminálov.
5. Vetná forma bola odvodená pravidlom 5, čím vznikla vetná forma $w\mathrm{b}w^R$, kde kde w je slovo nad abecedou terminálov.

Vo všetkých piatich prípadoch má vetná forma odvodená na $n+1$ krokov tvar ww^R, $w\mathrm{a}w^R$, $w\mathrm{b}w^R$ alebo $w\sigma w^R$, kde w je slovo nad abecedou terminálov.

Dokázali sme, ze všetky slová nad abecedou terminálov, ktoré sú zároveň vetnými formami gramatiky G, patria do jazyka $L = L'$. Jazyk generovaný gramatikou G je teda zhodný s jazykom L.