Richard Kráľovič

Siedma sada domácich úloh

Úloha č. 7.1:

Máme daný nedeterministický konečný automat $A = (K, \{a,b\}, \delta, q_0, \{q_2\})$, kde $K = \{q_0, q_1, q_2\}$ a delta funkcia je definovaná nasledovne: $\delta(q_0, a) = \{q_1\}$, $\delta(q_1, b) = \{q_2\}$, $\delta(q_2, a) = \{q_1\}$, $\delta(q_2, b) = \{q_0\}$.

Automat A neobsahuje prechody na ε. Preto môžeme konštrukciou uvedenou na prednáške vytvoriť deterministický konečný automat A_1, pre ktorý platí $L(A) = L(A_1)$ takto: $A_1 = (K_1, \{a,b\}, \delta_1, q_{\{}q_0\}, F_1)$, pričom $K_1 = \{q_\emptyset, q_{\{q_0\}}, q_{\{q_1\}}, q_{\{q_2\}}, q_{\{q_0,q_1\}}, q_{\{q_0,q_2\}} q_{\{q_1,q_2\}}, q_{\{q_0,q_1,q_2\}}\}$, $F_1 = \{q_{\{q_2\}}, q_{\{q_1,q_2\}}, q_{\{q_0,q_1,q_2\}}\}$ a funkcia δ_1 je definovaná nasledovne:

q	$\delta_1(q,a)$	$\delta_2(q,b)$
$q_\emptyset$	$q_\emptyset$	$q_\emptyset$
$q_{\{q_0\}}$	$q_{\{q_1\}}$	$q_\emptyset$
$q_{\{q_1\}}$	$q_\emptyset$	$q_{\{q_2\}}$
$q_{\{q_2\}}$	$q_{\{q_1\}}$	$q_{\{q_0\}}$
$q_{\{q_0,q_1\}}$	$q_{\{q_1\}}$	$q_{\{q_2\}}$
$q_{\{q_0,q_2\}}$	$q_{\{q_1\}}$	$q_{\{q_0\}}$
$q_{\{q_1,q_2\}}$	$q_{\{q_1\}}$	$q_{\{q_0,q_2\}}$
$q_{\{q_0,q_1,q_2\}}$	$q_{\{q_1\}}$	$q_{\{q_0,q_2\}}$

Podľa dôkazu z prednášky platí $L(A) = L(A_1)$. Definujme teraz automat A_2 nasledovne: $A_2 = (K_2, \{a,b\}, \delta_2, q_{\{}q_0\}, F_2)$, pričom $K_2 = \{q_\emptyset, q_{\{q_0\}}, q_{\{q_1\}}, q_{\{q_2\}}\}$, $F_1 = \{q_{\{q_2\}}\}$ a funkcia δ_2 je definovaná nasledovne:

q	$\delta_1(q,a)$	$\delta_2(q,b)$
$q_\emptyset$	$q_\emptyset$	$q_\emptyset$
$q_{\{q_0\}}$	$q_{\{q_1\}}$	$q_\emptyset$
$q_{\{q_1\}}$	$q_\emptyset$	$q_{\{q_2\}}$
$q_{\{q_2\}}$	$q_{\{q_1\}}$	$q_{\{q_0\}}$

Zjavne $K_2 \subseteq K_1$ a δ_2 je zúžením funkcie δ_1 na definičný obor $K_2 \times \{a,b\}$. Z definície automatu A_1 vyplýva, že neexistuje žiadne slovo $w \in \{a,b\}^*$, pre ktoré by platilo $\delta_1(q_{\{q_0\}}, w) \notin K_2$, teda zjavne platí $L(A_1) = L(A_2) = L(A)$. Definujme automat A_3 nasledovne: $A_3 = (K_3, \{a,b\}, \delta_3, p_1, F_3$, $K_3 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, $F_3 = \{p_3\}$ a δ_3 je definovaná nasledovne:

p	$\delta_1(p,a)$	$\delta_2(p,b)$
p_4	p_4	p_4
p_1	p_2	p_4
p_2	p_4	p_3
p_3	p_2	p_1

Zjavne automat A_3 získame z automatu A_2 substitúciou jednotlivých prvkov množiny stavov ($q_\emptyset \to p_4$, $q_{\{q_0\}} \to p_1$, $q_{\{q_1\}} \to p_2$, $q_{\{q_2\}} \to p_3$), teda $L(A_2) = L(A_3) = L(A)$.

Zaveďme nasledovné označenie: $R_{i,j}^k = \{w \in \{a,b\}^+ | = \delta_2(p_i, w) = p_j, \delta_2(p_i, u) = p_l l \leq k$ pre každý vlastný prefix u slova w. Zrejme $\varepsilon \notin L(A_3)$, teda $L(A_3) = R_{1,3}^4$. Podľa tvrdenia dokázaného na prednáške platí $R_{i,j}^0 = \{a \in \{a,b\} | \delta_2(p_i, a) = p_j\}$ a $R_{i,j}^k = R_{i,j}^{k-1} \cup R_{i,k}^{k-1} \left(R_{k,k}^{k-1}\right)^* R_{k,j}^{k-1}$ pre všetky $k \geq 1$. Tieto tvrdenia jednoznačne určujú jazyky $R_{i,j}^k$. Ak teda nájdeme jazyky, ktoré spĺňajú túto podmienku, bude platiť, že $L(A_3) = R_{1,3}^4$.

Označme $r_{i,j}^k$ taký regulárny výraz, pre ktorý platí $L\left(r_{i,j}^k\right) = R_{i,j}^k$. Zjavne pre automat A_3 platí:

i	j	$R^0_{i,j}$	$r^0_{i,j}$
1	1	$\emptyset$	$\boldsymbol{\emptyset}$
1	2	$\{a\}$	$\boldsymbol{a}$
1	3	$\emptyset$	$\boldsymbol{\emptyset}$
1	4	$\{b\}$	$\boldsymbol{b}$
2	1	$\emptyset$	$\boldsymbol{\emptyset}$
2	2	$\emptyset$	$\boldsymbol{\emptyset}$
2	3	$\{b\}$	$\boldsymbol{b}$
2	4	$\{a\}$	$\boldsymbol{a}$
3	1	$\{b\}$	$\boldsymbol{b}$
3	2	$\{a\}$	$\boldsymbol{a}$
3	3	$\emptyset$	$\boldsymbol{\emptyset}$
3	4	$\emptyset$	$\boldsymbol{\emptyset}$
4	1	$\emptyset$	$\boldsymbol{\emptyset}$
4	2	$\emptyset$	$\boldsymbol{\emptyset}$
4	3	$\emptyset$	$\boldsymbol{\emptyset}$
4	4	$\{a,b\}$	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

Potom pre všetky $1 \leq i,j,k \leq 4$ je s tvrdením $R^k_{i,j} = R^{k-1}_{i,j} \cup R^{k-1}_{i,k}\left(R^{k-1}_{k,k}\right)^* R^{k-1}_{k,j}$ ekvivalentné toto tvrdenie:

$$L\left(r^k_{i,j}\right) = L\left(r^{k-1}_{i,j}\right) \cup L\left(r^{k-1}_{i,k}\right)\left(L\left(r^{k-1}_{k,k}\right)\right)^* L\left(r^{k-1}_{k,j}\right)$$

Podľa definície regulárnych výrazov je toto tvrdenie ekvivalentné s nasledovnými tvrdeniami:

$$L\left(r^k_{i,j}\right) = L\left(r^{k-1}_{i,j}\right) \cup L\left(r^{k-1}_{i,k}\right) L\left(\left(r^{k-1}_{k,k}\right)^*\right) L\left(r^{k-1}_{k,j}\right)$$

$$L\left(r^k_{i,j}\right) = L\left(r^{k-1}_{i,j}\right) \cup L\left(r^{k-1}_{i,k}\left(r^{k-1}_{k,k}\right)^* r^{k-1}_{k,j}\right)$$

$$L\left(r^k_{i,j}\right) = L\left(r^{k-1}_{i,j} + r^{k-1}_{i,k}\left(r^{k-1}_{k,k}\right)^* r^{k-1}_{k,j}\right)$$

Ak bude platiť $r^k_{i,j} = r^{k-1}_{i,j} + r^{k-1}_{i,k}\left(r^{k-1}_{k,k}\right)^* r^{k-1}_{k,j}$, potom bude platiť aj

$$L\left(r^k_{i,j}\right) = L\left(r^{k-1}_{i,j} + r^{k-1}_{i,k}\left(r^{k-1}_{k,k}\right)^* r^{k-1}_{k,j}\right)$$

Teda bude platiť aj

$$R^k_{i,j} = R^{k-1}_{i,j} \cup R^{k-1}_{i,k}\left(R^{k-1}_{k,k}\right)^* R^{k-1}_{k,j}$$

Ak teda nájdeme regulkárne jazyky spĺňajúce podmienky $r^k_{i,j} = r^{k-1}_{i,j} + r^{k-1}_{i,k}\left(r^{k-1}_{k,k}\right)^* r^{k-1}_{k,j}$, potom bude platiť $L(A_3) = R^4_{1,3} = L(r^4_{1,3})$. Podmienka pre regulárne výrazy ich jednoznačne určuje, môžeme ich teda tvoriť:

i	j	$r^1_{i,j}$
1	1	$\boldsymbol{\emptyset} + \boldsymbol{\emptyset}\boldsymbol{\emptyset}^*\boldsymbol{\emptyset} = \boldsymbol{\emptyset}$
1	2	$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\emptyset}\boldsymbol{\emptyset}^*\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
1	3	$\boldsymbol{\emptyset} + \boldsymbol{\emptyset}\boldsymbol{\emptyset}^*\boldsymbol{\emptyset} = \boldsymbol{\emptyset}$
1	4	$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\emptyset}\boldsymbol{\emptyset}^*\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$
2	1	$\boldsymbol{\emptyset} + \boldsymbol{\emptyset}\boldsymbol{\emptyset}^*\boldsymbol{\emptyset} = \boldsymbol{\emptyset}$
2	2	$\boldsymbol{\emptyset} + \boldsymbol{\emptyset}\boldsymbol{\emptyset}^*\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\emptyset}$
2	3	$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\emptyset}\boldsymbol{\emptyset}^*\boldsymbol{\emptyset} = \boldsymbol{b}$
2	4	$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\emptyset}\boldsymbol{\emptyset}^*\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$
3	1	$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{\emptyset}^*\boldsymbol{\emptyset} = \boldsymbol{b}$

3	2	$a + b\emptyset^* a = a + ba$
3	3	$\emptyset + b\emptyset^*\emptyset = \emptyset$
3	4	$\emptyset + b\emptyset^* b = bb$
4	1	$\emptyset + \emptyset\emptyset^*\emptyset = \emptyset$
4	2	$\emptyset + \emptyset\emptyset^* a = \emptyset$
4	3	$\emptyset + \emptyset\emptyset^*\emptyset = \emptyset$
4	4	$a + b + \emptyset\emptyset^* b = a + b$

i	j	$r^2_{i,j}$
1	1	$\emptyset + a\emptyset^*\emptyset = \emptyset$
1	2	$a + a\emptyset^*\emptyset = a$
1	3	$\emptyset + a\emptyset^* b = ab$
1	4	$b + a\emptyset^* a = b + aa$
2	1	$\emptyset + \emptyset\emptyset^*\emptyset = \emptyset$
2	2	$\emptyset + \emptyset\emptyset^*\emptyset = \emptyset$
2	3	$b + \emptyset\emptyset^* b = b$
2	4	$a + \emptyset\emptyset^* a = a$
3	1	$b + (a + ba)\emptyset^*\emptyset = b$
3	2	$a + ba + (a + ba)\emptyset^*\emptyset = a + ba$
3	3	$\emptyset + (a + ba)\emptyset^* b = (a + ba)b$
3	4	$bb + (a + ba)\emptyset^* a = bb + (a + ba)a$
4	1	$\emptyset + \emptyset\emptyset^*\emptyset = \emptyset$
4	2	$\emptyset + \emptyset\emptyset^*\emptyset = \emptyset$
4	3	$\emptyset + \emptyset\emptyset^* b = \emptyset$
4	4	$a + b + \emptyset\emptyset^* a = a + b$

i	j	$r^3_{i,j}$
1	1	$\emptyset + ab((a + ba)b)^* b = ab((a + ba)b)^* b$
1	2	$a + ab((a + ba)b)^*(a + ba)$
1	3	$ab + ab((a + ba)b)^*(a + ba)b$
1	4	$b + aa + ab((a + ba)b)^*(bb + (a + ba)a)$
2	1	$\emptyset + b((a + ba)b)^* b = b((a + ba)b)^* b$
2	2	$\emptyset + b((a + ba)b)^*(a + ba) = b((a + ba)b)^*(a + ba)$
2	3	$b + b((a + ba)b)^*(a + ba)b$
2	4	$a + b((a + ba)b)^*(bb + (a + ba)a)$
3	1	$b + ((a + ba)b)((a + ba)b)^* b$
3	2	$a + ba + ((a + ba)b)((a + ba)b)^*(a + ba)$
3	3	$(a + ba)b + ((a + ba)b)((a + ba)b)^*(a + ba)b$
3	4	$bb + (a + ba)a + ((a + ba)b)((a + ba)b)^*(bb + (a + ba)a)$
4	1	$\emptyset + \emptyset((a + ba)b)^* b = \emptyset$
4	2	$\emptyset + \emptyset((a + ba)b)^*(a + ba) = \emptyset$
4	3	$\emptyset + \emptyset((a + ba)b)^*(a + ba)b = \emptyset$
4	4	$a + b + \emptyset((a + ba)b)^*(bb + (a + ba)a) = a + b$

Z regulárnych výrazov $r^4_{i,j}$ nás zaujíma iba výraz $r^4_{1,3}$. Pre tento výraz platí

$$r^4_{1,3} = r^3_{1,3} + r^3_{1,4}\left(r^3_{4,4}\right)^* \emptyset =$$

$$= ab + ab((a + ba)b)^*(a + ba)b$$

Platí teda $L(A) = ab + ab((a + ba)b)^*(a + ba)b$.