Richard Kráľovič

Ôsma sada domácich úloh

Úloha č. 8.4:

Daný je jazyk $L = \{a^i b^j c^k | \neg(i = j = k)\}$. Definujme PDA automat A nasledovne: $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, $K = \{q_0, q_{1a}, q_{1b}, q_{1c}, q_{2a}, q_{2b}, q_{2c}, q_{3a}, q_{3b}, q_{3c}\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{Z_0, Z_a, Z_b, Z_c\}$, $F = \{q_F\}$. Funkciu δ definujeme nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_{1a}, Z_0), (q_{2a}, Z_0), (q_{3a}, Z_0)\}\\
\delta(q_{1a}, a, Z_0) &= \{(q_{1a}, Z_0 Z_a)\}\\
\delta(q_{1a}, a, Z_a) &= \{(q_{1a}, Z_a Z_a)\}\\
\delta(q_{1a}, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_{1b}, Z_0)\}\\
\delta(q_{1a}, \varepsilon, Z_a) &= \{(q_{1b}, Z_a)\}\\
\delta(q_{1b}, b, Z_0) &= \{(q_{1b}, Z_0 Z_b)\}\\
\delta(q_{1b}, b, Z_a) &= \{(q_{1b}, \varepsilon)\}\\
\delta(q_{1b}, b, Z_b) &= \{(q_{1b}, Z_b Z_b)\}\\
\delta(q_{1b}, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_{1c}, Z_0)\}\\
\delta(q_{1b}, \varepsilon, Z_a) &= \{(q_{1c}, Z_a)\}\\
\delta(q_{1b}, \varepsilon, Z_b) &= \{(q_{1c}, Z_b)\}\\
\delta(q_{1c}, c, Z_0) &= \{(q_{1c}, Z_0)\}\\
\delta(q_{1c}, c, Z_a) &= \{(q_{1c}, Z_a)\}\\
\delta(q_{1c}, c, Z_b) &= \{(q_{1c}, Z_b)\}\\
\delta(q_{1c}, \varepsilon, Z_a) &= \{(q_F, Z_a)\}\\
\delta(q_{1c}, \varepsilon, Z_b) &= \{(q_F, Z_b)\}\\
\delta(q_{2a}, a, Z_0) &= \{(q_{2a}, Z_0 Z_a)\}\\
\delta(q_{2a}, a, Z_a) &= \{(q_{2a}, Z_a Z_a)\}\\
\delta(q_{2a}, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_{2b}, Z_0)\}\\
\delta(q_{2a}, \varepsilon, Z_a) &= \{(q_{2b}, Z_a)\}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\delta(q_{2b}, b, Z_0) &= \{(q_{2b}, Z_0)\}\\
\delta(q_{2b}, b, Z_a) &= \{(q_{2b}, Z_a)\}\\
\delta(q_{2b}, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_{2c}, Z_0)\}\\
\delta(q_{2b}, \varepsilon, Z_a) &= \{(q_{2c}, Z_a)\}\\
\delta(q_{2c}, c, Z_0) &= \{(q_{2c}, Z_0 Z_c)\}\\
\delta(q_{2c}, c, Z_a) &= \{(q_{2c}, \varepsilon)\}\\
\delta(q_{2c}, c, Z_c) &= \{(q_{2c}, Z_c Z_c)\}\\
\delta(q_{2c}, \varepsilon, Z_a) &= \{(q_F, Z_a)\}\\
\delta(q_{2c}, \varepsilon, Z_c) &= \{(q_F, Z_c)\}\\
\delta(q_{3a}, a, Z_0) &= \{(q_{3a}, Z_0)\}\\
\delta(q_{3a}, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_{3b}, Z_a)\}\\
\delta(q_{3b}, b, Z_0) &= \{(q_{3b}, Z_0 Z_b)\}\\
\delta(q_{3b}, b, Z_b) &= \{(q_{3b}, Z_b Z_b)\}\\
\delta(q_{3b}, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_{3c}, Z_0)\}\\
\delta(q_{3b}, \varepsilon, Z_b) &= \{(q_{3c}, Z_b)\}\\
\delta(q_{3c}, c, Z_0) &= \{(q_{3c}, Z_0 Z_c)\}\\
\delta(q_{3c}, c, Z_b) &= \{(q_{3c}, \varepsilon)\}\\
\delta(q_{3c}, c, Z_c) &= \{(q_{3c}, Z_c Z_c)\}\\
\delta(q_{3c}, \varepsilon, Z_b) &= \{(q_F, Z_b)\}\\
\delta(q_{3c}, \varepsilon, Z_c) &= \{(q_F, Z_c)\}
\end{aligned}
$$

Potrebujeme dokázať, že $L(A) = L$. Najskôr ukážeme inklúziu $L(A) \supseteq L$:

Ak slovo $u = a^i b^j c^k$ patrí do L, platí aspoň jedno z nasledujúcich tvrdení: $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$. Predpokladajme, že platí prvé tvrdenie, pričom platí $i > j$. Potom z definície δ funkcie vyplýva, že existuje odvodenie pre automat A nasledovné: $(q_0, \varepsilon a^i \varepsilon b^j \varepsilon c^k \varepsilon, Z_0) \vdash_A (q_{1a}, a^i \varepsilon b^j \varepsilon c^k \varepsilon, Z_0) \vdash_A (q_{1a}, a^{i-1} \varepsilon b^j \varepsilon c^k \varepsilon, Z_0 Z_a) \vdash_A \cdots \vdash_A (q_{1a}, \varepsilon b^j \varepsilon c^k \varepsilon, Z_0 Z_a^i) \vdash_A (q_{1b}, b^j \varepsilon c^k \varepsilon, Z_0 Z_a^i) \vdash_A (q_{1b}, b^{j-1} \varepsilon c^k \varepsilon, Z_0 Z_a^{i-1}) \vdash_A \cdots \vdash_A (q_{1b}, \varepsilon c^k \varepsilon, Z_0 Z_a^{i-j}) \vdash_A (q_{1c}, c^k \varepsilon, Z_0 Z_a^{i-j}) \vdash_A (q_{1c}, c^{k-1} \varepsilon, Z_0 Z_a^{i-j}) \vdash_A \cdots \vdash_A (q_{1c}, \varepsilon, Z_0 Z_a^{i-j}) \vdash_A (q_F, \varepsilon, Z_0 Z_a^{i-j})$, čo je akceptačný výpočet.

Podobne, ak by platilo $i < j$, existuje akceptačný výpočet $(q_0, \varepsilon a^i \varepsilon b^i b^{j-i} \varepsilon c^k \varepsilon, Z_0) \vdash_A (q_{1a}, a^i \varepsilon b^i b^{j-i} \varepsilon c^k \varepsilon, Z_0) \vdash_A (q_{1a}, a^{i-1} \varepsilon b^i b^{j-i} \varepsilon c^k \varepsilon, Z_0 Z_a) \vdash_A \cdots \vdash_A (q_{1a}, \varepsilon b^i b^{j-i} \varepsilon c^k \varepsilon, Z_0 Z_a^i) \vdash_A (q_{1b}, b^i b^{j-i} \varepsilon c^k \varepsilon, Z_0 Z_a^i) \vdash_A (q_{1b}, b^{i-1} b^{j-i} \varepsilon c^k \varepsilon, Z_0 Z_a^{i-1}) \vdash_A \cdots \vdash_A (q_{1b}, b^{j-i} \varepsilon c^k \varepsilon, Z_0) \vdash_A (q_{1b}, b^{j-i-1} \varepsilon c^k \varepsilon, Z_0 Z_b) \vdash_A \cdots \vdash_A (q_{1b}, \varepsilon c^k \varepsilon, Z_0 Z_b^{j-i}) \vdash_A (q_{1c}, c^k \varepsilon, Z_0 Z_b^{j-i}) \vdash_A (q_{1c}, c^{k-1} \varepsilon, Z_0 Z_a^{j-i}) \vdash_A \cdots \vdash_A (q_{1c}, \varepsilon, Z_0 Z_a^{j-i}) \vdash_A (q_F, \varepsilon, Z_0 Z_a^{j-i})$, čo je akceptačný výpočet.

Pre prípady $i \neq k$ resp. $j \neq k$ sa analogicky použijú stavy q_{2a}, q_{2b}, q_{2c} resp. q_{3a}, q_{3b}, q_{3c}.

Teraz ukážeme druhú inklúziu – $L(A) \subseteq L$:

Predpokladajme, že pre dané slovo $u = a_1 a_2 \ldots a_n$, kde $a_i \in \{\varepsilon\} \cup \Sigma$ existuje akceptačný výpočet $(q_0, a_1 \ldots a_n, \gamma_0) \cdots (q_n, \varepsilon, \gamma_n)$. Z Pretože výpočet je akceptačný, platí $q_n = q_F$. Z definície δ vyplýva, že $a_1 = \varepsilon$ a $q_1 \in \{q_{1a}, q_{2a}, q_{3a}\}$. Teraz ošetríme prvý prípad – $q_1 = q_{1a}$, zvyšné dva prípady sú k nemu analogické. Z definície δ vyplýva, že $a_2 = \ldots = a_i = a$, $q_1 = \ldots = q_i = q_{1a}$, $a_{i+1} = \varepsilon$, $a_{i+2} = \ldots = a_j = b$, $q_{i+1} = \ldots = q_j = q_{1b}$, $a_{j+1} = \varepsilon$, $a_{j+2} = \ldots = a_{n-1} = c$, $q_{j+1} = \ldots = q_{n-1} = q_{1c}$, $a_n = \varepsilon$, $q_n = q_F$, pričom $1 \leq i < j < n - 1$.

Zjavne $\gamma_0 = Z_0$. Označme $q = \#_a a_1 \ldots a_i$ a $w = \#_b b_1 \ldots b_i$. Z definície δ vyplýva, že γ_i má vždy tvar $Z_0 Z_a^{q-w}$ ak $q \geq w$ alebo $Z_0 Z_b^{w-q}$ ak $w \geq q$. Z definície δ taktiež vyplýva, že ak $q_n = q_F$, tak $\gamma_{n-1} \neq Z_0$. Slovo u je teda tvaru $a^i b^j c^k$, pričom $i \neq j$. Prípady $i \neq k$ resp. $j \neq k$ zodpovedajú prípadom, kde $q_1 = q_{2a}$ resp. $q_1 = q_{3a}$.

Kedže sme dokázali obe inklúzie, dokázali sme, že $L = L(A)$.

Úloha č. 8.10:

Máme daný regulárny jazyk L. Potrebujeme ukázať, že jazyk $L' = h^{-1}(L)$, kde h je ľubovoľný homomorfizmus, je tiež regulárny. Abecedu jazyka L označme Σ_1 a abecedu jazyka L' označme Σ_2. Potom homomorfizmus h zobrazuje slová zo Σ_2^* do Σ_1^*.

Definujme nasledovné relácie ekvivalencie: Nech $u, v \in \Sigma_1^*$, potom uR_Lv platí práve vtedy, keď $\forall z \in \Sigma_1^* : (uz \in L) \Leftrightarrow (vz \in L)$. Nech $u, v \in \Sigma_2^*$, potom $uR_{L'}v$ platí práve vtedy, keď $\forall z \in \Sigma_2^* : (uz \in L') \Leftrightarrow (vz \in L')$.

Podľa Myhill-Nerodovej vety platí, že ak je jazyk L regulárny, relácia ekvivalencie R_L má konečný index. Teraz dokážeme, že ak má relácia R_L konečný index, má aj relácia $R_{L'}$ konečný index. Dokazovať budeme tvrdšie tvrdenie, že relácia $R_{L'}$ má nanajvýš toľko tried ekvivalencie, ako relácia R_L. Tvrdenie dokážeme sporom:

Lema: Nech $u, v \in \Sigma_2^*$. (Potom zjavne $h(u), h(v) \in \Sigma_1^*$.) Nech neplatí $uR_{L'}v$. Potom neplatí $h(u)R_Lh(v)$.

Dôkaz: Tvrdenie dokážeme sporom. Nech by platilo $h(u)R_Lh(v)$. Potom podľa definície R_L platí $\forall z \in \Sigma_1^* : (h(u)z \in L) \Leftrightarrow (h(v)z \in L)$. Z toho však vyplýva, že platí aj $\forall z \in \Sigma_2^* : (h(u)h(z) \in L) \Leftrightarrow (h(v)h(z) \in L)$, lebo $h(\Sigma_2^*) \subseteq \Sigma_1^*$. Toto tvrdenie je ekvivalentné s tvrdením $\forall z \in \Sigma_2^* : (h(uz) \in L) \Leftrightarrow (h(vz) \in L)$. Podľa definície inverzného homomorfizmu je to ekvivalentné s $\forall z \in \Sigma_2^* : (uz \in h^{-1}(L)) \Leftrightarrow (vz \in h^{-1}(L))$. Podľa definície jazyka L' je to ekvivalentné s $\forall z \in \Sigma_2^* : (uz \in L') \Leftrightarrow (vz \in L')$. Podľa definície relácie $R_{L'}$ je to ekvivalentné s $uR_{L'}v$, čo je spor s predpokladom.

Počet tried ekvivalencií relácie R_L označme n. Predpokladajme, že relácia $R_{L'}$ má viac tried ekvivalencie ako R_L, teda že ich má aspoň $n + 1$. Potom môžme vybrať $n + 1$ slov $u_1, u_2 \dots u_{n+1}$ zo Σ_2^* takých, že nijaké dve nie sú ekvivalentné v relácii $R_{L'}$. Podľa lemy potom platí, že nijaké dve zo slov $h(u_i), h(u_j)$ nie sú ekvivalentné v relácii R_L. Každé z nich sa teda nachádza v inej triede ekvivalencie relácie R_L, relácia R_L má teda spoň $n+1$ tried ekvivalencie. To je spor s predpokladom, že R_L má n tried ekvivalencií.

Podľa Myhill-Nerodovej vety platí, že ak má relácia $R_{L'}$ konečný index, čo sme práve dokázali, je jazyk L' regulárny. Dôkaz je teda hotový.