Úloha. Nájdite jazyk, pre ktorý platí pumpovacia lema, ale nie je bezkontextový.

Myšlienka riešenia. Potrebujeme nájsť jazyk, kde je bezkontextovosť porušená len lokálne. Pumpovacia lema bude platiť, lebo v každom slove budeme vedieť napumpovať jeho "bezkontextovú časť".

Pokus o riešenie. Vieme, že jazyk $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ nie je bezkontextový. Zoberme teda jazyk $L' = \{a^n b^n c^n d^m \mid n, m > 0\}$, ktorý zjavne tiež nie je bezkontextový. Teraz v pumpovacej leme stačí pre ľubovoľné slovo w zobrať $u = a^n b^n c^n$, $v{=}d$, $x = y = \varepsilon$ a z rovné zvyšku slova. Pridaním d-čok dostaneme opäť slovo z nášho jazyka. Každé slovo teda vieme napumpovať.

Kde je problém? My sme zatiaľ ukázali, že každé slovo vieme napumpovať na i-tu, kde $i > 0$. Problém je v tom, že aj slovo $uv^0xy^0z = uxz$ musí patriť do nášho jazyka. A tu s nepríjemným prekvapením zistíme, že slovo $a^n b^n c^n d$ "na nultú" napumpovať nevieme. Tento drobný nedostatok musíme nejako zaplátať.

Riešenie. Zoberme trochu zložitejší jazyk $L'' = L' \cup \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$. Ľubovoľné slovo z L' vieme napumpovať postupom popísaným vyššie, slová tvaru $a^n b^n c^n d$ napumpované "na nultú" padnú do druhej časti jazyka. Ľubovoľné slovo z druhej časti jazyka zjavne zostane v druhej časti jazyka, nech ho rozdelíme a napumpujeme akokoľvek (určite dostaneme opäť nejaké slovo obsahujúce len písmená a, b, c). Pre tento jazyk teda platí pumpovacia lema.

Na druhej strane, tento jazyk nie je bezkontextový. Vieme, že trieda bezkontextových jazykov je uzavretá na prienik s reg. jazykom. Keby teda bol L'' bezkontextový, bol by bezkontextový aj jazyk $L'' \cap \{a^i b^j c^k d \mid i, j, k > 0\} = \{a^n b^n c^n d\}$. Tento jazyk však bezkontextový nie je. Preto ani L'' nie je bezkontextový, q.e.d.