Veľká písomka z Formálnych Jazykov a Automatov

myšlienky riešení ©MišoF.

Celý materiál je neoficiálny, ak tu mám chybu ja, vaše riešenie s rovnakou chybou **nie je** správne! Uvádzam len stručné myšlienky, ako napísať kratšie riešenie ako tie, čo spísala Janka Dvořáková.

$\boxed{1}$ Rozhodnite, či je jazyk

$$L = \left\{ uvxyz \;\middle|\; u,v,x,y,z \in \{a,b\}^* \wedge x = baba \wedge vy = y^R v^R \wedge \exists i; uz = a^i b^i \right\}$$

bezkontextový. Ak nie, dokážte. Ak áno, zostrojte zásobníkový automat, ktorý bude tento jazyk (stavom alebo prázdnou pamäťou) akceptovať. Súčasťou konštrukcie by mal byť aj slovný popis δ-funkcie a myšlienka dôkazu správnosti.

Majme automaty A_1, A_2, A_3 akceptujúce prázdnou pamäťou jednotlivé vnorené časti jazyka, tie zostrojíme triviálne, nech majú disjunktné zásobníkové abecedy.
Stavy nášho automatu budú štvorice $[i, q_1, q_2, q_3]$, kde $i \in \{1,2,3,4,5\}$ je práva čítaná časť slova, $q_i \in K_i$ sú stavy jednotlivých automatov. V stavoch $[i,\cdot,\cdot,\cdot]$ robíme kroky v automate $A_{3-|3-i|}$. Navyše ak sa rozhodneme (pre $i < 3$) alebo narazíme na zásobníkový symbol, ktorý nám nepatrí (pre $i \geq 3$), prejdeme do $[i+1,\cdot,\cdot,\cdot]$ (zvyšné 3 zložky stavu sa nezmenia, pre $i < 3$ treba pri tomto prechode dať na zásobník symbol $Z_{0(i+1)}$).
Z takejto konštrukcie je zrejmá správnosť zostrojeného automatu.

$\boxed{2}$ Rozhodnite, či je jazyk

$$L = \{w \mid w \in \{a,b,c\}^* \wedge \#_a(w) > \#_b(w) > \#_c(w)\}$$

bezkontextový. Ak nie, dokážte. Ak áno, zostrojte bezkontextovú gramatiku, ktorá bude tento jazyk generovať. Súčasťou konštrukcie by mal byť aj slovný popis množiny pravidiel a myšlienka dôkazu správnosti.

Dokážeme že nie je, lebo nespĺňa pumpovaciu lemu. Majme p, q z nej, zoberme slovo $a^{p+q+2}b^{p+q+1}c^{p+q}$. Ak nepumpujeme žiadne c, nevieme napumpovať na 0, ak nejaké c pumpujeme, nepumpujeme žiadne a, a teda nevieme napumpovať na 3.

$\boxed{6}$ Zostrojte (deterministický alebo nedeterministický) Turingov stroj, ktorý bude akceptovať jazyk:

$$L = \{a^{x_1}\#a^{x_2}\#\ldots\#a^{x_n} \mid x_i \in N_0, \text{čísla } x_i \text{ sa dajú rozdeliť do dvoch množín s rovnakým súčtom}\}$$

Váš stroj teda dostane na vstupe n-ticu čísel $x_1,\ldots,x_n$ zapísaných v unárnej sústave a má rozhodnúť, či $\exists P \subseteq \{1,\ldots,n\} = N_n;\ \sum_{i\in P} x_i = \sum_{i \in N_n/P} x_i$. Súčasťou konštrukcie by mal byť aj slovný popis δ-funkcie. Zdôvodnite správnosť svojej konštrukcie. *(Pozn.: L je jazyk nad abecedou $\Sigma = \{a,\#\}$.)*

Začneme tým, že prejdeme pásku a nedeterministicky niektoré úseky a prepíšeme na b.
$\delta(q_0,x) = \{(q_a,x,0),(q_b,x,0)\}$ $\quad (x \in \{a,\#\})$
$\delta(q_x,a) = \{(q_x,x,1)\}$ $\quad (x \in \{a,b\})$ (v stave q_x prepisujeme a na x)
$\delta(q_x,\#) = \{(q_y,\#,1)\}$ $\quad (x,y \in \{a,b\})$ (na # sa môžeme rozhodnúť o ďalšom úseku)
$\delta(q_x,B) = \{(h_a,B',-1)\}$ $\quad (x \in \{a,b\})$ (sme na konci slova)

Teraz potrebujeme overiť, či máme rovnako veľa a a b. To ide najjednoduchšie tak, že na striedačku odškrtávame a a b. Budeme mať stavy h_a, h_b (hľadaj a, b). Keď sme v stave h_a, znamená to, že sme doteraz odškrtli rovnako a a b, vtedy sa môžeme rozhodnúť (a overiť), či je už všetko vyškrtané. Ak áno, akceptujeme.
$\delta(h_x,y) = \{(h_x,y,d)\}$ $\quad (x \in \{a,b\}, y \in \{a,b,\#\}, d \in \{-1,0,1\})$ (nedeterministicky beháme po páske)
$\delta(h_x,x) = \{(h_y,\#,0)\}$ $\quad (x,y \in \{a,b\}, x \neq y)$ (ak sme našli, prepíšeme na #)
$\delta(h_a,\#) = \{(q_{-1},\#,-1)\})$ (ideme overiť, či už máme iba #)
(prebehneme po páske najskôr doľava, potom doprava)
$\delta(q_d,\#) = \{(q_d,\#,d)\})$ $\quad (d \in \{-1,1\})$ (v q_{-1} ideme po # doľava, v q_1 doprava)
$\delta(q_{-1},B) = \{(q_1,B',1)\})$ (sme na začiatku, ešte musíme ísť doprava)
$\delta(q_1,B) = \{(q_F,B',0)\})$ (prešli sme až na koniec, akceptujeme)

$\boxed{7}$ *(prémia pre fanatikov čo nemajú čo robiť)* Definujme odmocninu z jazyka nasledovne:

$$\sqrt{L} = \{w \mid ww \in L\}$$

Rozhodnite a dokážte, či musí byť odmocnina z regulárneho jazyka regulárna.

Majme DFA A pre L, zostrojíme A', ktorý bude čítať vstup a pre každý stav $q \in K$ si pamätať, v akom stave by bol A, keby začal čítať vstup v q. T.j. A' bude mať $K' = K^{|K|}$, $q_0 = [q_0, \ldots, q_{|K|-1}]$, $\delta'([q_{i_1}, \ldots, q_{i_{|K|-1}}], x) = [\delta(q_{i_1}, x), \ldots, \delta(q_{i_{|K|-1}}, x)]$.
Keď dočítame vstup w, vieme, v akom stave by bol A po prečítaní w a vieme aj to, do akého stavu by prešiel ďalším prečítaním w. Akceptujeme iff tento stav je akceptačný. Teda $F' = \{[q_{i_1}, \ldots, q_{i_{|K|-1}}] \mid q_{i_{i_1}} \in F\}$.
Ináč tvrdenie triviálne vyplýva z toho, že dvojsmerné konečné automaty (také, čo môžu ľubovoľne behať po vstupe) sú rovnako silné ako jednosmerné.