Riešenia príkladov z veľkej písomky z Formálnych Jazykov a Automatov

(zimný semester 2002/03)

$\boxed{1}$ Rozhodnite, či je jazyk

$$L = \{uvxyz \mid u,v,x,y,z \in \{a,b\}^* \wedge x = baba \wedge vy = y^R v^R \wedge \exists i; uz = a^i b^i\}$$

bezkontextový. Ak nie, dokážte. Ak áno, zostrojte zásobníkový automat, ktorý bude tento jazyk (stavom alebo prázdnou pamäťou) akceptovať. Súčasťou konštrukcie by mal byť aj slovný popis δ-funkcie a myšlienka dôkazu správnosti.

Riešenie. Daný jazyk je bezkontextový. Jedno z možných riešení:

$$\begin{aligned}
A &= (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_u^a, Z_0, F)\\
K &= \{q_u^a, q_u^b, q_v^1, q_v^2, q_x, q_x^b, q_x^{ba}, q_x^{bab}, q_x^{ok}, q_y^1, q_y^2, q_z^a, q_z^b, q_F\}\\
\Sigma &= \{a, b\}\\
\Gamma &= \{Z_0, a, b, E_u^a, E_u^b, E_v^1, E_v^2\}\\
F &= \{q_F\}
\end{aligned}$$

δ-funkcia:

$$\begin{aligned}
\delta(q_u^a, a, l) &= \{(q_u^a, la)\},\ l \in \{a, Z_0\} && (1)\\
\delta(q_u^a, \varepsilon, a) &= \{(q_u^b, a)\} && (2)\\
\delta(q_u^b, b, a) &= \{(q_u^b, \varepsilon),\} && (3)\\
\delta(q_u^t, \varepsilon, l) &= \{(q_v^1, lE_u^t)\},\ l \in \{a, Z_0\},\ t \in \{a, b\} && (4)\\
\delta(q_v^1, k, l) &= \{(q_v^1, lk)\},\ l \in \Gamma,\ k \in \Sigma && (5)\\
\delta(q_v^1, \varepsilon, l) &= \{(q_v^2, \varepsilon), (q_v^2, l)\},\ l \in \Sigma && (6)\\
\delta(q_v^2, k, k) &= \{(q_v^2, \varepsilon)\}, k \in \Sigma && (7)\\
\delta(q_v^t, \varepsilon, l) &= \{(q_x, lE_v^t)\},\ l \in \Gamma,\ t \in \{1, 2\} && (8)\\
\delta(q_x, b, l) &= \{(q_x^b, l)\},\ l \in \Gamma && (9)\\
\delta(q_x^b, a, l) &= \{(q_x^{ba}, l)\},\ l \in \Gamma && (10)\\
\delta(q_x^{ba}, b, l) &= \{(q_x^{bab}, l)\},\ l \in \Gamma && (11)\\
\delta(q_x^{bab}, a, l) &= \{(q_x^{ok}, l)\},\ l \in \Gamma && (12)\\
\delta(q_x^{ok}, \varepsilon, E_v^t) &= \{(q_y^t, \varepsilon)\},\ l \in \Gamma,\ t \in \{1, 2\} && (13)\\
\delta(q_y^1, k, l) &= \{(q_y^1, lk)\},\ l \in \Gamma,\ k \in \Sigma && (14)\\
\delta(q_y^1, \varepsilon, l) &= \{(q_y^2, \varepsilon), (q_y^2, l)\},\ l \in \Sigma && (15)\\
\delta(q_y^2, k, k) &= \{(q_y^2, \varepsilon)\},\ k \in \Sigma && (16)\\
\delta(q_y^2, \varepsilon, E_u^t) &= \{(q_z^t, \varepsilon)\},\ t \in \{a, b\} && (17)\\
\delta(q_z^a, a, l) &= \{(q_z^a, la)\},\ l \in \{a, Z_0\} && (18)
\end{aligned}$$

$$\delta(q_z^a, \varepsilon, l) = \{(q_z^b, l)\},\ l \in \{a, Z_0\} \tag{19}$$
$$\delta(q_z^b, b, a) = \{(q_z^b, \varepsilon)\} \tag{20}$$
$$\delta(q_z^b, \varepsilon, Z_0) = \{(q_F, \varepsilon)\} \tag{21}$$

Popis δ-funkcie:

Automat je nedeterministický. Princíp fungovania: čítame vstup a nedeterministicky sa rozhodujeme, v ktorej časti vstupného slova sa nachádzame (časti u, v, x, z, y). Vždy skontrolujeme, či sú tieto časti požadovaného tvaru.

V počiatočnom stave q_u^a sa čítajú symboly a z časti u a dávajú sa do zásobníka (1). Ak u obsahuje aj symboly b, na ε prejdeme do stavu q_u^b (2). V tomto stave sa s každým prečítaným symbolom b vyberie jedno a zo zásobníka (3). Z oboch stavov q_u^a aj q_u^b môžeme na ε prejst do stavu q_v^1 a začať čítať v (4). Pri tomto prechode uložíme na vrch zásobníka špeciálny symbol, ktorý označuje koniec čítania časti u a tiež či u obsahovalo iba symboly a (vložíme E_u^a) alebo a aj b (vložíme E_u^b). Toto potrebujeme kvôli tomu, aby sme pri neskoršom čítaní časti z vedeli, či ešte môže obsahovať nejaké symboly a.

V stave q_v^1 čítame zo vstupu časť v a prvú polovicu palindromu vy. Prečítané symboly sa ukladajú do zásobníka (5). Ak sa stred palindromu vy nachádza vo v, prejdeme na ε do stavu q_v^2 (t.j. čítame 2. polovicu vy - reverz) a prečítané symboly vyberáme zo zásobníka (6). Musíme rozlišovať 2 prípady: či je vy párnej alebo nepárnej dĺžky. Z oboch stavov q_v^1 aj q_v^2 môžeme na ε prejsť do stavu q_x, kde sa začne čítať zo vstupu častť x (8). Pri tomto prechode vložíme (podobne ako po ukončení čítania u) na vrchol zásobníka špeciálny symbol E_v^2 resp. E_v^1. Označujú koniec čítania časti v a tiež či v obsahovalo resp. neobsahovalo stred palindromu vy.

V stavoch $q_x, q_x^b, q_x^{ba}, q_x^{bab}, q_x^{ok}$ sa číta zo vstupu časť $x = baba$, obsah zásobníka sa nemení (9)-(12). Potom na ε prejdeme do stavu q_y^1 resp. q_y^2 - podľa symbolu na vrchu zásobníka (13). Ak tam je E_v^1, vieme, že stred palindromu vy je v časti y a preto v stave q_y^1 symboly zo vstupu dávame do zásobníka (14). Ak sa rozhodneme, že sme už v strede vy, prejdeme do q_v^2 a čítané symboly zo zásobníka vyberáme (15)-(16). Ak bol na vrchu zásobníka symbol E_v^2, stred palindromu vy bol už vo v a teda prejdeme priamo do stavu q_y^2. Ak v tomto stave zbadáme na vrchu zásobníka symbol E_u^a resp. E_u^B, začneme zo vstupu čítať poslednú časť vstupného slova - z prejdeme do stavu q_z^a resp. q_z^b (17). V týchto stavoch sa správame rovnako ako v q_u^a, q_u^b (18)-(20), s tým rozdielom, že pokiaľ v stave q_z^b uvidíme na vrchole zásobníka Z_0, prejdeme do akceptačného stavu q_F(21).

Myšlienka dôkazu:

Ukážeme, že automat pracuje tak ako je uvedené v popise δ-funkcie.

Iné (a zrejme jednoduchšie) riešenie:

Zostrojíme gramatiku G, takú, že $L(G) = L$ a k nej štandartnou konštrukciou zásobníkový automat. Gramatika bude vyzerať nasledovne:

$$\begin{array}{rclrcl} & & & P & = & \{ \\ G & = & (N,T,P,\sigma) & \sigma & \rightarrow & a\sigma b|AB|BA \\ N & = & \{\sigma,A,B,C,D\} & A & \rightarrow & aAb|\varepsilon \\ T & = & \{a,b\} & B & \rightarrow & aBa|bBb|CD|DC \\ & & & C & \rightarrow & aCa|bCb|a|b|\varepsilon \\ & & & D & \rightarrow & baba\} \end{array}$$

$\boxed{2}$ Rozhodnite, či je jazyk

$$L = \{w \mid w \in \{a,b,c\}^* \wedge \#_a(w) > \#_b(w) > \#_c(w)\}$$

bezkontextový. Ak nie, dokážte. Ak áno, zostrojte bezkontextovú gramatiku, ktorá bude tento jazyk generovať. Súčasťou konštrukcie by mal byť aj slovný popis množiny pravidiel a myšlienka dôkazu správnosti.

Riešenie. Daný jazyk nie je bezkontextový. Dokážeme pomocou pumpovacej lemy pre bezkontextové jazyky.

Najprv znenie pumpovacej lemy pre $\mathcal{L}_{CF}$:

$L \in \mathcal{L}_{CF} \Rightarrow\ \exists p,q,\forall w \in L, |w| > p\ \exists u,v,x,y,z$ také, že platí:

1. $w = uvxyz$
2. $vy \neq \varepsilon$
3. $|vxy| < q$
4. $\forall i, i \geq 0 :\ uv^ixy^iz \in L$

A teraz znenie dokazovaného tvrdenia:
(čo nie je nič iné, ako obrátenie predchádzajúcej implikácie).

$\forall p,q,\ \ \exists w \in L, |w| > p$, také, že $\forall u,v,x,y,z$ platí

1. $w = uvxyz$
2. $vy \neq \varepsilon$
3. $|vxy| < q$

4. $\exists i, i \geq 0 : uv^ixy^iz \notin L$

$\Rightarrow L \notin \mathcal{L}_{CF}$.

Zoberme si slovo $w = a^{p+q+2}b^{p+q+1}c^{p+q}, w \in L$. Ďalej uvažujme všetky možné rozklady w na 5 častí u, v, x, y, z. Ľahko vidno, že časť, ktorú pumpujeme, t.j. vxy, môže obsahovať buď iba symboly a (resp. b , c) alebo symboly susediace - a a b resp. b a c. V opačnom prípade by došlo k sporu s predpokladom $(vy \neq \varepsilon) \wedge (|vxy| < q)$. Ďalej teda rozoberieme všetky prípustné možnosti:

1. $vxy = a^i$, $i > 0$, potom $vy = a^k$, $i \geq k > 0$ a $w' = uv^0xy^0z = a^{p+q+2-k}b^{p+q+1}c^{p+q}$, keďže $k > 0$, $p+q+2-k \leq p+q+1$ a teda $\#_a(w) \leq \#_b(w) \Rightarrow w' \notin L$.
2. $vxy = b^i, i > 0$, potom $vy = b^k, i \geq k > 0$ a $w' = uv^0xy^0z = a^{p+q+2}b^{p+q+1-k}c^{p+q}$, keďže $k > 0$, $p+q+1-k \leq p+q$ a teda $\#_b(w) \leq \#_c(w) \Rightarrow w' \notin L$.
3. $vxy = c^i$, $i > 0$, potom $vy = c^k$, $i \geq k > 0$ a $w' = uv^2xy^2z = a^{p+q+2}b^{p+q+1}c^{p+q+k}$, keďže $k > 0$, $p+q+1 \leq p+q+k$ a teda $\#_b(w) \leq \#_c(w) \Rightarrow w' \notin L$
4. $vxy = a^ib^j$, $i, j > 0$, máme dve možnosti:
   - $\#_b(vy) = 0$, t.j. $vy = a^k$, $i \geq k > 0$ a to je presne prípad 1.
   - $\#_b(vy) \neq 0$, t.j. $vy = a^kb^l$ $i \geq k > 0$ a $j \geq l > 0$, tu dostaneme rovnaký spor ako v prípade 2.
5. $vxy = b^ic^j$, $i, j > 0$, opäť máme dve možnosti:
   - $\#_c(vy) = 0$, t.j. $vy = b^k$, $i \geq k > 0$ a to je presne prípad 2.
   - $\#_c(vy) \neq 0$, t.j. $vy = b^kc^l$ $i \geq k > 0$ a $j \geq l > 0$, potom $w' = uv^2xy^2z = a^{p+q+2}b^{p+q+1+k}c^{p+q+l}$ a teda $\#_a(w) \leq \#_b(w) \Rightarrow w' \notin L$.

$\boxed{3}$ *Riešenie.*

1. Nech $L_1, L_2 \notin \mathcal{L}_{CF}$. Potom určite $(L_1 \cup L_2) \notin \mathcal{L}_{CF}$. NIE

   Stačí, keď si zoberieme jazyky z otázky č. 8 - ani jeden nie je bezkontextový, ale ich zjednotenie je bezkotextový jazyk.
2. Existujú jazyky $L_1 \in \mathcal{R}$ a $L_2 \notin \mathcal{R}$ také, že $L_2 \subseteq L_1$. ÁNO

   Napr. $L_1 = \{w|w \in \{a, b\}^*\}, L_2 = \{a^ib^i|i \geq 0\}$, zrejme $L_1 \in \mathcal{R}$ a $L_2 \notin \mathcal{R}$ a $L_2 \subseteq L_1$.
3. Nech $L_1, L_2, \ldots \in \mathcal{L}_{CF}$, $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$. Potom aj $L \in \mathcal{L}_{CF}$. NIE

   Napr. ak pre $i = 1, 2.. L_i = \{a^ib^ic^i\}$, potom zrejme $\forall i\ L_i \in \mathcal{L}_{CF}$ (lebo každý z týchto jazykov je konečný a každý konečný jazyk je regulárny a každý regulárny jazyk je aj bezkontextový). Potom $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i = \{a^ib^ic^i|i \geq 0\}$, čo určite nie je bezkontextový jazyk.

4. Frázové jazyky sú uzavreté na zreťazenie. ÁNO

   Inak povedané máme dva TS A_1, A_2 a máme zostrojiť TS A_3 akceptujúci jazyk $L(A_1)L(A_2)$. Jedno z možných riešení je, že A_3 bude pracovať s dvojstopou páskou a najskôr si prekopíruje časť vstupu na hornú stopu, tam spustí A_1, ak ten akceptuje, spustí A_2 na spodnej stope a ak aj ten akceptuje, tak akceptuje aj A_3.

5. Existuje homomorfizmus h taký, že $h(\varepsilon) \neq \varepsilon$. NIE

   Sporom: $\exists h : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$, taký, že $h(\varepsilon) \neq \varepsilon$, t.j. $\exists u \in \Sigma_2^+$, také, že $h(\varepsilon) = u$. Nech $w \in \Sigma_1^*$, môžme písať $w = w\varepsilon$. Potom $h(w) = h(w\varepsilon) = h(w)h(\varepsilon) = h(w)u \neq h(w)$, čo je spor.

6. Diagonálny jazyk L_D je rekurzívny. NIE

   $L_D^c \notin L_{RE} \Rightarrow L_D^c \notin L_{rec} \Rightarrow L_D \notin L_{rec}$ (podľa uzavretosti L_{rec} na komplement).

7. Existuje homomorfizmus h taký, že $h^{-1}(\varepsilon) \neq \{\varepsilon\}$. ÁNO

   Napr. $h : \{a,b\}^* \to \{a,b\}^*$, $h(a) = \varepsilon$, $h(b) = b$, potom $h^{-1}(\varepsilon) = \{a^i | i \geq 0\}$.

8. Je jazyk $L = \{a^i b^i c^i | i \geq 0\} \cup \{a^i b^i c^j | i,j \geq 0 \wedge j \neq i\}$ bezkontextový? ÁNO

   V podstate $L = \{a^i b^i c^k | i,k \geq 0\}$, čo je zrejme bezkontextový jazyk.

9. Homomorfizmov z $\{a,b,c\}^*$ do $\{a,b\}^*$, ktoré zobrazia *abcacab* na *aaaaa* je konečne veľa. ÁNO

   Máme dva také homomorfizmy:

   - $h : \{a,b,c\}^* \to \{a,b\}$, $h(a) = h(b) = a$, $h(c) = \varepsilon$
   - $h : \{a,b,c\}^* \to \{a,b\}$, $h(a) = h(c) = a$, $h(b) = \varepsilon$

10. Môže byť prienik frázového a bezkontextového jazyka regulárny? ÁNO

    Zoberme si dva ľubovoľné regulárne jazyky L_1, L_2. Potom $L_1 \in \mathcal{R} \Rightarrow L_1 \in \mathcal{L}_{CF}$ a $L_2 \in \mathcal{R} \Rightarrow L_2 \in \mathcal{L}_{RE}$. Keďže trieda regulárnych jazykov je uzavretá na prienik, $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{R}$.

$\boxed{4}$ Daná je bezkontextová gramatika G. K tejto gramatike zostrojte štandardnou konštrukciou zásobníkový automat A taký, aby $L(G) = N(A)$. *(Pozn.: Vrch zásobníka je napravo.)*

$$G = (N, T, P, \sigma),\ N = \{\sigma, \beta, \gamma, \delta\},\ T = \{a, b\}$$

$$P = \{\sigma \to \sigma\sigma \mid a\beta\gamma, \quad \beta \to \gamma \mid \delta\sigma, \quad \gamma \to \beta \mid a\delta b, \quad \delta \to \beta a \mid \varepsilon\}$$

Riešenie.

$$\begin{array}{rcl} A &=& (K, \Sigma, \Gamma, \delta, Z_0, \sigma, F) \\ K &=& \{q_0\} \\ \Sigma &=& T \\ \Gamma &=& N \cup T \\ F &=& \emptyset \end{array}$$

$$\begin{aligned} \delta(q_0, \varepsilon, \sigma) &= \{(q_0, \sigma\sigma), (q_0, \gamma\beta a)\} && (1) \\ \delta(q_0, \varepsilon, \beta) &= \{(q_0, \gamma), (q_0, \sigma\delta)\} && (2) \\ \delta(q_0, \varepsilon, \gamma) &= \{(q_0, \beta), (q_0, b\delta a)\} && (3) \\ \delta(q_0, \varepsilon, \delta) &= \{(q_0, a\beta), (q_0, \varepsilon\} && (4) \\ \delta(q_0, a, a) &= \{(q_0, \varepsilon)\} && (5) \\ \delta(q_0, b, b) &= \{(q_0, \varepsilon)\} && (6) \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Rozhodnite, či existuje deterministický Turingov stroj, ktorý na každom vstupe zastaví a ak na vstupe dostane trojicu (kód Turingovho stroja $\langle A \rangle$, vstupné slovo w, stav $q \in K_A$), tak akceptuje práve vtedy, ak TS A počas výpočtu na slove w niekedy prejde stavom q. Ak takýto stroj existuje, struène popíšte jeho konštrukciu. Ak neexistuje, dokážte. Môžete sa odvolať na vety dokázané na prednáške.

Riešenie. Daný TS neexistuje. Dôkaz redukciou na L_U.

Predpokladajme, že taký TS existuje, označme si ho M. Zoberme si ľubovoľný TS A a vstupné slovo w. Nech množina akceptačných stavov A je $F = \{q_1, .., q_n\}$. Potom pre $i = 1, 2, \ldots, n$ spúšťame M na vstupe $\langle A \rangle, w, q_i$. Ak pre niektoré i M akceptuje potom $w \in L(A)$, ak neakceptuje pre žiadne i, potom $w \notin L(A)$. Tým sme zostrojili TS, ktorý zastaví na každom vstupe a akceptuje univerzálny jazyk L_U, čo je spor, lebo $L_U \notin L_{rec}$. To znamená, že TS M nemôže existovať.

$\boxed{6}$ Zostrojte (deterministický alebo nedeterministický) Turingov stroj, ktorý bude akceptovať jazyk:

$L = \{a^{x_1}\#a^{x_2}\#\ldots\#a^{x_n} \mid x_i \in N_0$, čísla x_i sa dajú rozdeliť do dvoch množín s rovnakým súčtom$\}$

Váš stroj teda dostane na vstupe n-ticu čísel $x_1, \ldots, x_n$ zapísaných v unárnej sústave a má rozhodnúť, či $\exists P \subseteq \{1, \ldots, n\} = N_n;\ \sum_{i \in P} x_i = \sum_{i \in N_n/P} x_i$. Súčasťou konštrukcie by mal byť aj slovný popis δ-funkcie. Zdôvodnite správnosť svojej konštrukcie. *(Pozn.: L je jazyk nad abecedou $\Sigma = \{a, \#\}$.)*

Riešenie. Jedno z možných riešení:

$$\begin{array}{lcl}
A & = & (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F) \\
K & = & \{q_0, q_{find\ a}, q_{mark\ A^x}, q_{find\ \#}, q_{back}, q_{mark\ Aa}, q_{mark\ A}, q_{mark\ a}, q_{check}, q_F\} \\
\Sigma & = & \{a, \#\} \\
\Gamma & = & \{a, \#, A, A', a'\} \\
F & = & \{q_F\}
\end{array}$$

δ-funkcia:

$$\begin{array}{rcll}
\delta(q_0, x) & = & \{(q_{find\ a}, x, 1)\},\ x \in \Sigma \cup B & (1) \\
\delta(q_{find\ a}, \#) & = & \{(q_{find\ a}, \#, 1)\} & (2) \\
\delta(q_{find\ a}, a) & = & \{(q_{find\ \#}, a, 0), (q_{mark\ A^x}, a, 0)\} & (3) \\
\delta(q_{find\ \#}, a) & = & \{(q_{find\ \#}, a, 1)\} & (4) \\
\delta(q_{find\ \#}, x) & = & \{(q_{find\ a}, x, 0)\},\ x \in \{\#, B\} & (5) \\
\delta(q_{mark\ A^x}, a) & = & \{(q_{mark\ A^x}, A, 1)\} & (6) \\
\delta(q_{mark\ A^x}, x) & = & \{(q_{find\ a}, x, 0)\},\ x \in \{\#, B\} & (7) \\
\delta(q_{find\ a}, B) & = & \{(q_{back}, B, -1)\} & (8) \\
\delta(q_{back}, x) & = & \{(q_{back}, x, -1)\},\ x \in \Gamma & (9) \\
\delta(q_{back}, B) & = & \{(q_{mark\ Aa}, B, 1)\} & (10) \\
\delta(q_{mark\ Aa}, x) & = & \{(q_{mark\ Aa}, x, 1)\},\ x \in \{\#, A', a'\} & (11) \\
\delta(q_{mark\ Aa}, a) & = & \{(q_{mark\ A}, a', 1)\} & (12) \\
\delta(q_{mark\ Aa}, A) & = & \{(q_{mark\ a}, A', 1)\} & (13) \\
\delta(q_{mark\ A}, x) & = & \{(q_{mark\ A}, x, 1)\},\ x \in \{\#, A', a', a\} & (14) \\
\delta(q_{mark\ A}, A) & = & \{(q_{back}, A', 0)\} & (15) \\
\delta(q_{mark\ a}, x) & = & \{(q_{mark\ a}, x, 1)\},\ x \in \{\#, A', a', A\} & (16) \\
\delta(q_{mark\ a}, a) & = & \{(q_{back}, a', 0)\} & (17) \\
\delta(q_{mark\ Aa}, B) & = & \{(q_F, B, 0)\} & (18)
\end{array}$$

Popis δ-funkcie:

Takto zostrojený TS je nedeterministický. Princíp fungovania: Na začiatku si nedeterministicky pre niektoré i označíme reťazce a^{x_i}. Potom už len skontrolujeme, či sme hádali správne a teda či počet označených a je rovný počtu neoznačených a.

Najskôr prejdeme do stavu $q_{find\ a}$ (1), v ktorom hľadáme začiatok najbližšieho neprázdneho reťazca a^{x_i} (2) . Keď ho nájdeme, nedeterministicky sa rozhodneme, či tento reťazec označíme (3). Ak áno, prejdeme do stavu $q_{mark\ A^x}$ a všetky symboly a v danom reťazci prepíšeme na A (6). Ak narazíme na koniec - symbol # alebo $blank$, opäť prejdeme do stavu $q_{find\ a}$ (7). Ak reťazec nechceme označiť, prejdeme do stavu $q_{find\ \#}$, v ktorom bez zmeny na páske prejdeme až po ukončovací znak # alebo $blank$ a tiež prejdeme do $q_{find\ a}$ (4)-(5). Pokiaľ sme v stave $q_{find\ a}$ a narazíme na $blank$, prešli sme celé slovo, a pokračujeme v stave q_{back} (8). Vrátime sa na začiatočný $blank$ a prejdeme do stavu $q_{mark\ Aa}$ (9)-(10), kde budeme kontrolovať rovnosť počtu označených a neoznačených symbolov.

V stavoch $q_{mark\ Aa}$, $q_{mark\ A}$, $q_{mark\ a}$ prepíšeme na páske jeden symbol a na a' a A na A'. Potom prejdeme do stavu q_{back} a vrátime sa po začiatočný $blank$ a cyklus opakujeme (11)-(17). Pokiaľ v stave $q_{mark\ Aa}$ narazíme na koncový $blank$, vieme, že už všetky symboly boli označené a teda môžeme prejsť do akceptačného stavu (18).

Myšlienka dôkazu:

Ukážeme, že automat pracuje tak ako je to uvedené v popíse v δ-funkcie, t.j. že na začiatku prejde celým vstupom a niektoré reťazce a^{x_i} označí a potom skontroluje rovnosť súčtov.