PRÉMIA #2 – VZOROVÉ RIEŠENIE

Mišo Forišek

Je daná bezkontextová gramatika G_{cf} a regulárna gramatika G_r. Popíšte všeobecnú konštrukciu pre bezkontextovú gramatiku G takú, že $L(G) = L(G_{cf}) \cap L(G_r)$. Dokážte správnosť svojej konštrukcie. **Pri vašej konštrukcii nepoužívajte PDA!**

Začneme tým, že k danej G_r štandardnou konštrukciou zostrojíme deterministický automat A_r s počiatočným stavom q_0. Môžeme predpokladať, že G_{cf} je v Chomského normálnom tvare, ak nie, tak ju doň ďalšou štandardnou konštrukciou upravíme.

Naša gramatika G by mala generovať práve tie slová, ktoré vie vygenerovať G_{cf} a zároveň na nich vie A_r prejsť zo stavu q_0 do nejakého akceptačného stavu q_f. Zabezpečíme to nasledovne:

Neterminály našej gramatiky budú trojice $[\beta, q_1, q_2]$ ($\beta \in N_{cf}$, $q_1, q_2 \in K_r$). Pritom chceme zabezpečiť, aby sa z takéhoto neterminálu dali odvodiť práve tie slová, ktoré sa dajú v G_{cf} odvodiť z β a zároveň na nich vie A_r prejsť z q_1 do q_2. Preto pre každé pravidlo $(\alpha \to \beta\gamma) \in P_{cf}$ (kde $\alpha, \beta, \gamma \in N_{cf}$) budeme mať v našej gramatike G množinu pravidiel:

$$\forall q_1, q_2, q_3 \in K_r \ ; \ \Big([\alpha, q_1, q_2] \to [\beta, q_1, q_3]\, [\gamma, q_3, q_2] \Big) \in P$$

(Intuitívne: slovo odvoditeľné z α, na ktoré vie A_r prejsť z q_1 do q_2, môže vyzerať tak, že použijeme pravidlo $\alpha \to \beta\gamma$, pričom z β vygenerujeme slovo, na ktoré vie A_r prejsť z q_1 do nejakého q_3 a z γ vygenerujeme slovo, na ktoré vie A_r prejsť z toho q_3 do q_2.)

Navyše pre každé pravidlo $(\alpha \to x) \in P_{cf}$ (kde $\alpha \in N_{cf}$, $x \in T_{cf}$) budeme mať v našej gramatike G množinu pravidiel:

$$\forall q_1, q_2 \in K_r \ ; \ \Big([\alpha, q_1, q_2] \to x \Big) \in P \iff q_2 = \delta_r(q_1, x)$$

(Intuitívne: ak sme z α vedeli odvodiť x, z $[\alpha, q_1, q_2]$ to pôjde len vtedy, ak zároveň vie A_r na x prejsť z q_1 do q_2.)

Naša gramatika sa ešte potrebuje na začiatku rozhodnúť, v ktorom akceptačnom stave A_r skončí. Preto budeme mať navyše počiatočný neterminál σ a pridáme pravidlá:

$$\forall q_f \in F_r \ ; \ \Big(\sigma \to [\sigma_{cf}, q_0, q_f] \Big) \in P$$

Dôkaz správnosti by spočíval v tom formálne dokázať tvrdenie o tom, čo sa dá odvodiť z neterminálu $[\beta, q_1, q_2]$ (a to indukciou od dĺžky odvodenia v gramatike G):

$$\forall \beta \in N_{cf}; \ \forall q_1, q_2 \in K_r; \ \forall w \in (\Sigma_{cf} \cup \Sigma_r)^*;$$

$$[\beta, q_1, q_2] \underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}} w \iff \Big(\beta \underset{G_{cf}}{\overset{*}{\Rightarrow}} w \ \wedge \ (q_1, w) \vdash_r^* (q_2, \varepsilon) \Big)$$