Prémia #3 – vzorové riešenie

Mišo Forišek

Tvrdenie zo zadania platí. Dôkaz:

Nech L je regulárny jazyk. Potom existuje DKA A taký, že $L = L(A)$. Označme jeho počiatočný stav q_0. Ďalej stav $\delta(q_0, a)$ označme q_1, stav $\delta(q_1, a)$ označme q_2, atď. Keďže náš automat má len konečne veľa stavov, časom sa niektorý stav v tejto postupnosti zopakuje. BUNV[1] nech $q_a = q_{a+b}$. Potom ale zjavne $\forall x \geq a; q_x = q_{x+b}$, t.j. od okamihu, keď sa nám prvýkrát zopakuje niektorý stav, bude postupnosť stavov periodická, lebo A je deterministický. Ako ale potom vyzerá výpočet nášho automatu? Majme ľubovoľné slovo a^n, kde $n \geq a$. Potom zjavne $a^n \in L \iff a^{n+b} \in L$ (lebo $(q_0, a^{n+b}) \vdash^n (q_n, a^b) \vdash^b (q_{n+b}, \varepsilon) = (q_n, \varepsilon)$, a teda výpočet na týchto dvoch slovách skončí v tom istom stave). To ale znamená, že $\forall x \geq a; c_x = c_{x+b}$. Preto číslo C je periodické (s predperiódou dĺžky a a periódou dĺžky b), a teda racionálne.

Opačne, nech C je racionálne, potom je periodické. Označme dĺžku predperiódy a, dĺžku periódy b. Potom príslušný jazyk L vieme akceptovať napr. nasledujúcim DKA A:
$A = (K, \{a\}, \delta, q_0, F)$
$K = \{q_i \mid 0 \leq i < a + b\}$
$F = \{q_i \mid 0 \leq i < a + b \ \wedge \ c_i = 1\}$
$\delta(q_i, a) = q_{i+1}$ pre $0 \leq i < a + b - 1$
$\delta(q_{a+b-1}, a) = q_a$

Prevedenie podrobnejšieho dôkazu všetkých uvedených tvrdení s radosťou prenechávam iniciatívnemu čitateľovi.

[1] bez ujmy na všeobecnosti