Prémia #4 – vzorové riešenie

Mišo Forišek

$L_1 = \{a^i x \mid |x| = i \wedge x \in R\}$
Nemusí (ale môže) byť regulárny, stačí vziať $R = \emptyset$, resp. $R = \{b^j \mid j \geq 0\}$.

$L_2 = \{a^i \mid \exists x; |x| = i \wedge x \in R\}$
Je regulárny. Zoberme homomorfizmus h taký, že $\forall x \in \Sigma_R; h(x) = a$. Potom $L_2 = h(R)$ a vieme, že trieda regulárnych jazykov je uzavretá vzhľadom na homomorfizmus.

$L_3 = \{a^i \mid \exists x; |x| = i \wedge a^i x \in R\}$
Je regulárny. Zostrojme preň NKA A, ktorý bude pracovať nasledovne: Majme DKA A' pre jazyk R. Na začiatku si A tipne, v akom stave bude A' po prečítaní slova, ktoré práve dostal na vstupe (a zapamätá si to ako jednu zložku svojho stavu). Teraz potrebuje overiť dve veci: či sa naozaj A' dostane po prečítaní slova na vstupe do tipnutého stavu a či sa na rovnaký počet krokov vie A' dostať z tohto stavu do niektorého akceptačného stavu. Náš automat bude teda simulovať A', aby overil, či si dobre tipol, a zároveň bude simulovať výpočet A' z tipnutého stavu – vždy, keď prečítame písmeno vstupu, spravíme krok, ktorý by A' robil v druhej polovici slova (nedeterministicky si tipneme, aké písmenko čítal). Akceptujeme, ak je po dočítaní vstupu A' v stave, ktorý sme si na začiatku tipli a ak sa nám na toľko krokov, koľko malo vstupné slovo, naozaj podarilo dostať v A' z tipnutého stavu do akceptačného.
(Rozmyslite si, že A sme mohli zostrojiť aj deterministický nasledovne: Namiesto tipnutia stavu, v ktorom skončíme by sme si v stave pamätali pre každý stav A' množinu stavov A', do ktorých sa vieme na príslušný počet krokov (a ľubovoľné písmená) dostať. Zároveň s tým simulujeme A' na našom vstupe. Keď dočítame vstup, vieme v akom stave je A' v polovici slova, hľadaná druhá polovica existuje iff v množine pre tento stav je niektorý stav akceptačný.)

$L_4 = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$
Nie je regulárny, vyplýva to napr. z pumpovacej lemy.

$L_5 = L_4^*$
Je regulárny. Keďže $a \in L_4$, je $L_5 = L_4^* \supseteq \{a\}^*$. Preto zjavne $L_5 = \{a\}^*$. (Navyše vieme, že platí *Lagrangeova veta*: Každé prirodzené číslo vieme zapísať ako súčet štvorcov štyroch celých čísel. Preto už $L_4^4 = \{a\}^*$ je regulárny jazyk.)

$L_6 = \{a^i b^j \mid (i + j) \bmod 11 = 7\}$
Zjavne je regulárny, ľahko preň zostrojíme napr. konečný automat, v ktorého stave si pamätáme $(i + j) \bmod 11$ pre už prečítanú časť slova a či ešte čítame a alebo už b.

$L_7 = \{ucv \mid u,v \in \{a,b\}^* \wedge \#_a(u) = \#_a(v)\}$
Nie je regulárny. Sporom. Keby bol, tak aj jeho prienik s regulárnym jazykom $\{a,c\}^*$ by musel byť regulárny. To je však jazyk $\{a^i c a^i \mid i \geq 0\}$, o ktorom vieme, že regulárny nie je.

$L_8 = \left\{a^i w b^i \mid w \in \{a,b\}^* \wedge i \geq 0\right\}$
Je regulárny. Totiž $L_8 \supseteq \left\{a^i w b^i \mid w \in \{a,b\}^* \wedge i = 0\right\} = \{w \mid w \in \{a,b\}^*\}$, a teda $L_8 = \{a,b\}^*$.

$L_9 = \{uv \mid u,v \in \{a,b\}^* \wedge \#_a(u) = \#_b(v)\}$
Je regulárny. Totiž aj $L_9 = \{a,b\}^*$. Zoberme ľubovoľné slovo $w = w_1 w_2 \dots w_n$ nad abecedou $\{a,b\}$. Označme $f(i) = \#_a(w_1 \dots w_i) - \#_b(w_{i+1} \dots w_n)$. Zjavne $f(0) \leq 0$, $f(n) \geq 0$. Chceme ukázať, že slovo w vieme vhodne rozdeliť, t.j. že $\exists k; f(k) = 0$. Ak $f(0) = 0$ alebo $f(n) = 0$, vyhrali sme. V opačnom prípade je hodnota $f(0)$ záporná, $f(n)$ kladná. Keď sa budeme postupne dívať na hodnoty $f(0), f(1), \ldots$, musíme časom prvýkrát naraziť na nezápornú hodnotu. Pre ľub. i sa však hodnoty $f(i)$ a $f(i+1)$ líšia práve o 1 (prečo?), preto prvá nezáporná hodnota, ktorú nájdeme, bude práve 0, q.e.d.

L_{10} = množina slov v knihe Hopcroft, Ullmann: Formálne jazyky a automaty
Aj keď sa to možno nezdá, spomínaná knižka je konečná a konečná je aj množina slov v nej. No a každý konečný jazyk je regulárny.

$L_{11} = \{x \mid \exists y \in R; xy \in S\}$
Môže a nemusí byť regulárny, stačí zobrať $R = \{\varepsilon\}$, potom $L_{11} = S$.

L_{12} = jazyk, ktorého všetky vlastné podmnožiny sú regulárne
Je regulárny. Prázdna množina má túto vlastnosť a je regulárna. Ak je L_{12} neprázdny, zoberme ľubovoľné slovo $w \in L_{12}$. Potom $\{w\}$ aj $L_{12}/\{w\}$ sú vlastné podmnožiny jazyka L_{12}, a teda sú regulárne. Regulárne je teda aj ich zjednotenie.