Sada 1

Úloha 1

(prezentácia)

Zadanie:

Zostrojte zásobníkový automat A pre jazyk:

L = { ucv | u,v ∈ $1\{0,1\}^*$ a zároveň u,v nie sú binárne zápisy po sebe idúcich čísiel u,v takých, že u ≤ v a "c" je terminálny symbol(inak povedané v ≠ Successor(u))}

Dokážte správnosť svojej konštrukcie (t.j. L(A) = L)

Pozn.: $1\{0,1\}^*$ reprezentuje množinu binárnych reťazcov, začínajúcich bitom 1(teda nemajú žiadne leading zeros)

Riešenie:

Riešením úlohy je nasledujúci zásobníkový automat A, akceptujúci koncovými stavmi.

A = (K, Σ, Γ, δ, q_0, Z, F)

K = { q_0, q_{A1}, q_{A2}, q_{A3}, q_{A4}, q_{A5}, q_{A6}, q_{B1}, q_{B2}, q_{B3}, q_{B4}, q_{B5}, q_{B6}, q_{B7}, q_{B8}, q_{B9}, q_{B10}, q_{B11}, q_{C1}, q_{C2}, q_{C3}, q_{C4}, q_{C5}, q_{C6}, q_{C1}, q_{C2}, q_{C3}, q_{C4}, q_{C5}, q_{C6}, q_{C7}, q_{C8}, q_{C9}, q_{C10}, q_{C11}, q_{C12}, q_{C13}, q_{C14}, q_{C15}, q_{C16}, q_{C17}, q_{C18}, q_{F1}, q_{F2}, q_{F3}, q_{F4}, q_{F5}, q_{F6}, q_{F7}, q_{F8}, q_{F9}, q_{F10}, q_{F11}, q_{F12}}

Σ = { 0, 1, c}

Γ = { Z, I}

F = { q_{F1}, q_{F2}, q_{F3}, q_{F4}, q_{F5}, q_{F6}, q_{F7}, q_{F8}, q_{F9}, q_{F10}, q_{F11}, q_{F12}}

$\delta(q_0,\varepsilon,Z) = \{(q_{A1},Z), (q_{B1},Z), (q_{C1},Z)\}$

I.vetva:

$\delta(q_{A1},1,Z) = \{(q_{A2},ZI)\}$

$\delta(q_{A2},x,\gamma) = \{(q_{A2},\gamma I)\}$ $x \in \{0,1\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{A2},c,\gamma) = \{(q_{A3},\gamma)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{A3},1,I) = \{(q_{A4},\varepsilon)\}$

$\delta(q_{A4},x,I) = \{(q_{A4},\varepsilon)\}$ $x \in \{0,1\}$

$\delta(q_{A4},x,Z) = \{(q_{A5},Z)\}$ $x \in \{0,1\}$

$\delta(q_{A4},\varepsilon,I) = \{(q_{A6},\varepsilon)\}$

$\delta(q_{A5},x,Z) = \{(q_{F1},Z)\}$ $x \in \{0,1\}$

$\delta(q_{A6},\varepsilon,I) = \{(q_{F2},\varepsilon)\}$

$\delta(q_{F1},x,Z) = \{(q_{F1},Z)\}$ $x \in \{0,1\}$

$\delta(q_{F2},\varepsilon,I) = \{(q_{F2},\varepsilon)\}$

II.vetva:

$\delta(q_{B1},1,Z) = \{(q_{B2},ZI)\}$

$\delta(q_{B2},1,\gamma) = \{(q_{B2},\gamma I)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{B2},c,\gamma) = \{(q_{B3},\gamma)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{B2},0,\gamma) = \{(q_{B2},\gamma I)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{B3},1,I) = \{(q_{B4},\varepsilon)\}$

$\delta(q_{B4},\varepsilon,I) = \{(q_{B5},\varepsilon)\}$

$\delta(q_{B4},0,I) = \{(q_{B4},\varepsilon)\}$

$\delta(q_{B4},1,Z) = \{(q_{F4},Z)\}$

$\delta(q_{B4},1,I) = \{(q_{B6},\varepsilon)\}$

$\delta(q_{B5},\varepsilon,Z) = \{(q_{F3},Z)\}$

$\delta(q_{B6},x,I) = \{(q_{B6},\varepsilon)\}$ $x \in \{0,1\}$

$\delta(q_{B6},x,Z) = \{(q_{F5},Z)\}$ $x \in \{0,1\}$

$\delta(q_{B6},\varepsilon,I) = \{(q_{B7},\varepsilon)\}$

$\delta(q_{B7},\varepsilon,Z) = \{(q_{F6},Z)\}$

$\delta(q_{B8},x,\gamma) = \{(q_{B8},\gamma I)\}$ $x \in \{0,1\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{B8},c,\gamma) = \{(q_{B9},\gamma)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{B9},1,I) = \{(q_{B10},\varepsilon)\}$

$\delta(q_{B10},x,I) = \{(q_{B10},\varepsilon)\}$ $x \in \{0,1\}$

$\delta(q_{B10},x,Z) = \{(q_{F7},Z)\}$ $x \in \{0,1\}$

$\delta(q_{B10},\varepsilon,I) = \{(q_{B11},\varepsilon)\}$

$\delta(q_{B11},\varepsilon,Z) = \{(q_{F8},Z)\}$

III.vetva:

$\delta(q_{C1},1,Z) = \{(q_{C2},Z), (q_{C11},ZI)\}$

$\delta(q_{C2},0,Z) = \{(q_{C2},Z), (q_{C3},ZI)\}$

$\delta(q_{C2},1,Z) = \{(q_{C2},Z), (q_{C11},ZI)\}$

$\delta(q_{C3},1,\gamma) = \{(q_{C3},\gamma I)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{C3},0,\gamma) = \{(q_{C4},\gamma I)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{C3},c,\gamma) = \{(q_{C8},\gamma)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{C4},x,\gamma) = \{(q_{C4},\gamma I)\}$ $x \in \{0,1\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{C4},c,\gamma) = \{(q_{C5},\gamma)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{C5},1,\gamma) = \{(q_{C6},\gamma)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{C6},0,\gamma) = \{(q_{C6},\gamma)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{C6},1,I) = \{(q_{C6},I) , (q_{C7},\varepsilon)\}$

$\delta(q_{C7},x,I) = \{(q_{C7},\varepsilon)\}$ $x \in \{0,1\}$

$\delta(q_{C7},\varepsilon,Z) = \{(q_{F9},Z)\}$

$\delta(q_{C8},1,\gamma) = \{(q_{C9},\gamma)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{C9},1,\gamma) = \{(q_{C9},\gamma)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{C9},0,I) = \{(q_{C9},I) , (q_{C10},\varepsilon)\}$

$\delta(q_{C10},x,I) = \{(q_{C10},\varepsilon)\}$ $x \in \{0,1\}$

$\delta(q_{C10},\varepsilon,Z) = \{(q_{F10},Z)\}$

$\delta(q_{C11},1,\gamma) = \{(q_{C11},\gamma I)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{C11},0,\gamma) = \{(q_{C12},\gamma I)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{C11},c,\gamma) = \{(q_{C16},\gamma)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{C12},x,\gamma) = \{(q_{C12},\gamma I)\}$ $x \in \{0,1\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{C12},c,\gamma) = \{(q_{C13},\gamma)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{C13},1,\gamma) = \{(q_{C14},\gamma)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{C14},1,\gamma) = \{(q_{C14},\gamma)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{C14},0,I) = \{(q_{C14},I) , (q_{C15},\varepsilon)\}$

$\delta(q_{C15},x,I) = \{(q_{C15},\varepsilon)\}$ $x \in \{0,1\}$

$\delta(q_{C15},\varepsilon,Z) = \{(q_{F11},Z)\}$

$\delta(q_{C16},1,\gamma) = \{(q_{C17},\gamma), (q_{C18},\varepsilon)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{C17},0,\gamma) = \{(q_{C17},\gamma)\}$ $\gamma \in \Gamma$

$\delta(q_{C17},1,I) = \{(q_{C17},I) , (q_{C18},\varepsilon)\}$

$\delta(q_{C18},x,I) = \{(q_{C18},\varepsilon)\}$ $x \in \{0,1\}$

$\delta(q_{C18},\varepsilon,Z) = \{(q_{F12},Z)\}$

Popis riešenia:

Na začiatku sa automat nedeterministicky rozhodne pre jednu z troch hlavných vetiev, prvá akceptuje všetky také slová w, pre ktoré platí $w = ucv \wedge u,v \in 1\{0,1\}^* \wedge \||u| - |v|\| > 1$(čiže $v \neq Succ(u)$), druhá akceptuje všetky také slová w, pre ktoré platí $w = ucv \wedge u,v \in 1\{0,1\}^* \wedge \||u| - |v|\| = 1$ a súčasne to nie je situácia $u = \{1\}^+ \wedge v = 1\{0\}^+ \wedge |v| - |u| = 1$, kedy by sa $v = Succ(u)$. Tretia vetva akceptuje všetky slová w také, že $w = ucv \wedge u,v \in 1\{0,1\}^* \wedge |u| = |v| \wedge$ existuje bit v ktorom sa líši Succ(u) od v. V tomto prípade treba pozorne sledovať pokiaľ sa

môže carry – flag posúvať. Teda automat si vyberie bit v slove u, v stave si zapamätá jeho hodnotu(stav $q_{C3} \vee q_{C11}$). Potom si do zásobníku dáva čiarky(aby vedel v slove v skontrolovať korešpondujúci bit, t.j. bit na rovnakej pozícii – a to tak, že pri spracúvaní slova v sa nedeterministicky rozhodne, že je to on, a začne vyberať paličky a ak si vybral dobre, tak vyprázdni zásobník spolu s dočítaním vstupu) až do konca slova u, teda v zásobníku má toľko čiarok, koľký bit sprava si vybral. Popritom si opäť v stave zapamätá či za vybratým bitom bola ešte 0. Teda podľa toho sa dá zistiť, či sa tento bit v Successore preklopí. Ak je za ním 0, tak stačí skontrolovať v slove v tú istú pozíciu a ak na nej je rôzny bit, tak slovo akceptuje. Ak za vybratým bitom v slove u nebola nula, to znamená, že sa v Successore by sa preklopil, čiže stačí skontrolovať korešpondujúci bit v slove v a ak je rovnaký, tak ho akceptuje(lebo v Successore by sa preklopil, čiže by bol rôzny).

Dôkaz:

Chceme ukázať rovnosť dvoch množín L(A) = L. Teda potrebujeme dokázať dve inklúzie $L \subseteq L(A) \wedge L(A) \subseteq L$.

$L(A) \subseteq L$

Chceme ukázať, že $\forall w(w \in L(A) \Rightarrow w \in L)$. Majme akceptačný výpočet na slove $w \in L(A)$ a chceme ukázať, že slovo $w \in L$, t.j. že w je tvaru ucv, kde $u,v \in 1\{0,1\}^* \wedge v \neq Succ(u)$. Keďže má automat tri disjunktné vetvy, tak si rozložíme dôkaz na 3 časti. Ale najprv urobíme zopár úvah, ktoré sú spoločné pre všetky tri. Máme akceptačný výpočet na slove w, teda automat sa dostal do niektorého z koncových stavov. Z delta funkcie je zrejmé, že w muselo byť v tvare ucv. Ďalej je zrejmé, že u muselo byť v tvare $1\{0,1\}^*$, podobne aj $v \in 1\{0,1\}^*$ (lebo tak bol skonštruovaný automat a inak sa do koncových stavov dostať nedá). Ešte si treba všimnúť, že v II. a III. vetve sa nedá inak dostať do akceptačného stavu ako zo zásobníkom obsahujúcim iba počiatočný symbol Z. A teda vieme, že w je tvaru ucv, kde $u,v \in 1\{0,1\}^*$,treba ešte ukázať, že $v \neq Succ(u)$. Teraz analyzujme každú vetvu zvlášť:

1.)
   a. ak A akceptoval v stave q_{F1}, tak akceptačný výpočet obsahoval $|u|$ vložení paličiek do zásobníka(sporom: ak by nevložil $|u|$ paličiek, tak by znak c musel byť na pozícii s indexom rôznym od $|u| + 1$ – aby mohol prejsť zo stavu q_{A2} do q_{A3} a ďalej spracúvať slovo v, t.j. už nevkladať žiadne paličky do zásobníka, čo je ale spor s w = ucv), potom $|u|$ vybratí zo zásobníka a ešte musel dočítať aspoň dva symboly zo vstupu so zásobníkom v ktorom bol už iba zásobníkový symbol. Teda $|u| - |v| < -1$ teda $||u| - |v|| > 1$ a teda $v \neq Succ(u) \Rightarrow w \in L$

   b. ak A akceptoval v stave q_{F2}, tak akceptačný výpočet obsahoval $|u|$ vložení paličiek do zásobníka(sporom: ak by nevložil $|u|$ paličiek, tak by znak c musel byť na pozícii s indexom rôznym od $|u| + 1$ – aby mohol prejsť zo stavu q_{A2} do q_{A3} a ďalej spracúvať slovo v, t.j. už nevkladať žiadne paličky do zásobníka, čo je ale spor s w = ucv), potom $|v|$ vybratí zo zásobníka a ešte musel vybrať aspoň dve paličky zo zásobníka s už dočítaným vstupom. Teda $|u| - |v| > 1$ teda $||u| - |v|| > 1$ a teda $v \neq Succ(u) \Rightarrow w \in L$

2.)
   a. ak A akceptoval v stave q_{F3}, tak akceptačný výpočet obsahoval $|u|$ vložení paličiek do zásobníka(sporom: ak by nevložil $|u|$ paličiek, tak by znak c musel byť na pozícii s indexom rôznym od $|u| + 1$ – aby mohol prejsť zo stavu q_{B2} do $q_{B3} \vee q_{B8}$ do stavu q_{B9} a ďalej spracúvať slovo v, t.j. už nevkladať žiadne paličky do zásobníka, čo je ale spor s w = ucv), potom $|v|$ vybratí zo zásobníka

a ešte musel vybrať jednu paličku zo zásobníka s už dočítaným vstupom. symbol. Teda $|u| - |v| = 1$ a teda $v \neq Succ(u) \Rightarrow w \in L$

b. ak A akceptoval v stave q_{F4}, tak akceptačný výpočet obsahoval $|u|$ vložení paličiek do zásobníka(sporom: ak by nevložil $|u|$ paličiek, tak by znak c musel byť na pozícii s indexom rôznym od $|u| + 1$ – aby mohol prejsť zo stavu q_{B2} do $q_{B3} \vee q_{B8}$ do stavu q_{B9} a ďalej spracúvať slovo v, t.j. už nevkladať žiadne paličky do zásobníka, čo je ale spor s w = ucv), potom $|u|$ vybratí zo zásobníka a ešte musel dočítať práve jednu 1 zo vstupu so zásobníkom v ktorom bol už iba zásobníkový symbol. To znamená, že $v = 1\{0\}^*1$ a teda aj keď $|u| - |v| = -1$, v nemôže byť successorom u t.j. $v \neq Succ(u) \Rightarrow w \in L$

c. ak A akceptoval v stave q_{F5}, tak akceptačný výpočet obsahoval $|u|$ vložení paličiek do zásobníka(sporom: ak by nevložil $|u|$ paličiek, tak by znak c musel byť na pozícii s indexom rôznym od $|u| + 1$ – aby mohol prejsť zo stavu q_{B2} do $q_{B3} \vee q_{B8}$ do stavu q_{B9} a ďalej spracúvať slovo v, t.j. už nevkladať žiadne paličky do zásobníka, čo je ale spor s w = ucv), potom $|u|$ vybratí zo zásobníka a ešte musel dočítať práve jeden symbol zo vstupu so zásobníkom v ktorom bol už iba zásobníkový symbol. Popritom ale $v = 1\{0\}^*1\{0,1\}^*$ a teda aj keď $|u| - |v| = -1$, v nemôže byť successorom u t.j. $v \neq Succ(u) \Rightarrow w \in L$

d. ak A akceptoval v stave q_{F6}, tak akceptačný výpočet obsahoval $|u|$ vložení paličiek do zásobníka(sporom: ak by nevložil $|u|$ paličiek, tak by znak c musel byť na pozícii s indexom rôznym od $|u| + 1$ – aby mohol prejsť zo stavu q_{B2} do $q_{B3} \vee q_{B8}$ do stavu q_{B9} a ďalej spracúvať slovo v, t.j. už nevkladať žiadne paličky do zásobníka, čo je ale spor s w = ucv), potom $|v|$ vybratí zo zásobníka a ešte musel vybrať jednu paličku zo zásobníka s už dočítaným vstupom. symbol. Teda $|u| - |v| = 1$ a teda $v \neq Succ(u) \Rightarrow w \in L$

e. ak A akceptoval v stave q_{F7}, tak akceptačný výpočet obsahoval $|u|$ vložení paličiek do zásobníka(sporom: ak by nevložil $|u|$ paličiek, tak by znak c musel byť na pozícii s indexom rôznym od $|u| + 1$ – aby mohol prejsť zo stavu q_{B2} do $q_{B3} \vee q_{B8}$ do stavu q_{B9} a ďalej spracúvať slovo v, t.j. už nevkladať žiadne paličky do zásobníka, čo je ale spor s w = ucv), potom $|u|$ vybratí zo zásobníka a ešte musel dočítať práve jeden symbol zo vstupu so zásobníkom v ktorom bol už iba zásobníkový symbol. Popritom ale $u = \{1\}^+0\{0,1\}^*$ a teda aj keď $|u| - |v| = -1$, v nemôže byť successorom u t.j. $v \neq Succ(u) \Rightarrow w \in L$

f. ak A akceptoval v stave q_{F8}, tak akceptačný výpočet obsahoval $|u|$ vložení paličiek do zásobníka(sporom: ak by nevložil $|u|$ paličiek, tak by znak c musel byť na pozícii s indexom rôznym od $|u| + 1$ – aby mohol prejsť zo stavu q_{B2} do $q_{B3} \vee q_{B8}$ do stavu q_{B9} a ďalej spracúvať slovo v, t.j. už nevkladať žiadne paličky do zásobníka, čo je ale spor s w = ucv), potom $|v|$ vybratí zo zásobníka a ešte musel vybrať jednu paličku zo zásobníka s už dočítaným vstupom. symbol. Teda $|u| - |v| = 1$ a teda $v \neq Succ(u) \Rightarrow w \in L$

3.)

Ak máme akceptačný výpočet, ktorý prechádzal cez III. vetvu, cez ľubovolnú z jej podvetví, tak si automat v slove u vybral k-ty bit sprava(v stave q_{C2}) a do zásobníku dal k paličiek a potom použil prechod cez c a spracoval slovo v. Dôkaz tvrdenia, že ak si vyberie k-ty bit sprava, tak bude v zásobníku k paličiek urobíme indukciou vzhľadom na vybratý bit.

<u>k = 1</u>

Automat musel prejsť do stavu $q_{C3} \vee q_{C4} \vee q_{C11} \vee q_{C12}$ zo stavu $q_{C1} \vee q_{C2} \vee q_{C3} \vee q_{C4} \vee q_{C11} \vee q_{C12}$ súčasne musel zapísať paličku na zásobník.

Keďže to bol posledný bit sprava, tak musel na c prejsť do stavu $q_{C5} \vee q_{C8} \vee q_{C13} \vee q_{C16}$ a pokračovať spracúvaním v. T.j. na zásobníku bola 1 palička. Nech toto tvrdenie platí pre n-tý bit zprava(IP), dokážeme, že platí aj pre n+1-vý.

k = n + 1

Podobnou úvahou je zrejmé, že ak si vybral n+1-vý bit, tak musel zapísať jednu paličku , ale tým sa dostane do podobnej situácie ako keby si vybral n-tý bit sprava. Teda použijeme IP.

Automat sa dostal do akceptačného stavu a to sa dá jedine na ε – prechod pri zásobníku obsahujúcom iba počiatočný symbol Z. Teda si musel tipnúť správny bit v slove v, odkiaľ začal vyprázdňovať zásobník a tento bit musel byť na rovnakej(korešpondujúcej) pozícii ako vybratý bit v slove u.
Lebo po tipe v slove v sa dostal do jedného zo stavov q_{C7}, q_{C10}, q_{C15}, q_{C18} , kde sa pri načítaní 1 symbolu zo vstupu vyberie práve jedna palička zo zásobníka. Teraz zostáva už len analyzovať všetky 4 podvetvy:

a. ak A akceptoval v stave q_{F9}, tak sa na k-tom mieste sprava, ktoré si automat tipol nachádzala 0, ktorá ale nebola posledná($\delta(q_{C3},0,\gamma) = \{(q_{C4},\gamma I)\}$, inak ako cez q_{C4} sa do q_{F9} nedá dostať), teda carry-flag, ak uvažujeme o successore slova u na ňu nemá vplyv. A v slove v na korešpondujúcom mieste našiel 1, teda $v \neq Succ(u) \Rightarrow w \in L$

b. ak A akceptoval v stave q_{F10}, tak sa na k-tom mieste sprava, ktoré si automat tipol nachádzala 0, ktorá ale bola posledná($\delta(q_{C3},c,\gamma) = \{(q_{C8},\gamma)\}$, inak ako cez q_{C8} sa do q_{F10} nedá dostať), teda carry-flag, ak uvažujeme o successore slova ju preklopí na 1. V slove v na korešpondujúcom mieste našiel 0, teda $v \neq Succ(u) \Rightarrow w \in L$

c. ak A akceptoval v stave q_{F11}, tak sa na k-tom mieste sprava, ktoré si automat tipol nachádzala 1, za ktorou sa nachádzala 0($\delta(q_{C11},0,\gamma) = \{(q_{C12},\gamma I)\}$, inak ako cez q_{C12} sa do q_{F11} nedá dostať), teda carry-flag, ak uvažujeme o successore slova u na ňu nemá vplyv. A v slove v na korešpondujúcom mieste našiel 0, teda $v \neq Succ(u) \Rightarrow w \in L$

d. ak A akceptoval v stave q_{F12}, tak sa na k-tom mieste sprava, ktoré si automat tipol nachádzala 1, za ktorou sa nenachádzala 0 ($\delta(q_{C11},c,\gamma) = \{(q_{C16},\gamma)\}$, inak ako cez q_{C16} sa do q_{F12} nedá dostať), teda carry-flag, ak uvažujeme o successore slova ju preklopí na 0. V slove v na korešpondujúcom mieste našiel 1, teda $v \neq Succ(u) \Rightarrow w \in L$

A teda ľubovolné w, pre ktoré existuje akceptačný výpočet patrí do L a teda **$L(A) \subseteq L$.**

$L \subseteq L(A)$

Chceme ukázať, že $\forall w(w \in L \Rightarrow w \in L(A))$.Majme slovo $w \in L$, teda $w = ucv \wedge u,v \in 1\{0,1\}^* \wedge v \neq Succ(u)$. Chceme ukázať, že pre w existuje akceptačný výpočet v A. Urobíme logické vetvenie dôkazu podľa slov u a v:

—— ***$||u| - |v|| \geq 2$*** **1.)**
|
—— $||u| - |v|| < 2$ —— ***$||u| - |v|| = 1$*** **2.)**
|
—— $||u| - |v|| = 0 \Rightarrow$ ***$|u| = |v|$*** **3.)**

1.) **$\|u| - |v\| \geq 2$** , zostrojíme akceptačný výpočet pre takéto w, t.j. w = ucv, u = $u_1...u_n$, v = $v_1...v_m$, $|n - m| \geq 2$

a. **$m - n \geq 2$**

$(q_0, u_1...u_ncv_1...v_m, Z) \vdash (q_{A1}, u_1...u_ncv_1...v_m, Z) \vdash (q_{A2}, u_2...u_ncv_1...v_m, ZI) \vdash^*$
$(q_{A2}, cv_1...v_m, ZI...I\{ n paličiek\}) \vdash (q_{A3}, v_1...v_m, ZI...I\{ n paličiek\}) \vdash$
$(q_{A4}, v_2...v_m, ZI...I\{ n-1 paličiek\}) \vdash^* (q_{A4}, v_{m-n}...v_m, Z) \vdash (q_{A5}, v_{m-n+1}...v_m, Z) \vdash$
$(q_{F1}, v_{m-n+2}...v_m, Z) \vdash^*$ **(q_{F1}, ε, Z)**

b. **$n - m \geq 2$**

$(q_0, u_1...u_ncv_1...v_m, Z) \vdash (q_{A1}, u_1...u_ncv_1...v_m, Z) \vdash (q_{A2}, u_2...u_ncv_1...v_m, ZI) \vdash^*$
$(q_{A2}, cv_1...v_m, ZI...I\{ n paličiek\}) \vdash (q_{A3}, v_1...v_m, ZI...I\{ n paličiek\}) \vdash$
$(q_{A4}, v_2...v_m, ZI...I\{ n-1 paličiek\}) \vdash^* (q_{A4}, \varepsilon, ZI...I\{ n-m paličiek\}) \vdash$
$(q_{A6}, \varepsilon, ZI...I\{ n-m-1 paličiek\}) \vdash (q_{F2}, \varepsilon, ZI...I\{ n-m-2 paličiek\}) \vdash^*$ **(q_{F2}, ε, Z)**

2.) **$\|u| - |v\| = 1$** , zostrojíme akceptačný výpočet pre takéto w, t.j. w = ucv, u = $u_1...u_n$, v = $v_1...v_m$, $|n - m| = 1$

a. **$n - m = 1$**

I.) $u = \{1\}^+$

α.) $v = 1\{0\}^*$

$(q_0, u_1...u_ncv_1...v_m, Z) \vdash (q_{B1}, u_1...u_ncv_1...v_m, Z) \vdash (q_{B2}, u_2...u_ncv_1...v_m, ZI) \vdash^*$
$(q_{B2}, cv_1...v_m, ZI...I\{ n paličiek\}) \vdash (q_{B3}, v_1...v_m, ZI...I\{ n paličiek\}) \vdash$
$(q_{B4}, v_2...v_m, ZI...I\{ n-1 paličiek\}) \vdash^* (q_{B4}, \varepsilon, ZI) \vdash (q_{B5}, \varepsilon, Z) \vdash$ **(q_{F3}, ε, Z)**

β.) $v \neq 1\{0\}^*$, t.j. $v = 1\{0\}^*1\{0,1\}^*$ - druhá jednotka je na k-tom mieste zľava

$(q_0, u_1...u_ncv_1...v_m, Z) \vdash (q_{B1}, u_1...u_ncv_1...v_m, Z) \vdash (q_{B2}, u_2...u_ncv_1...v_m, ZI) \vdash^*$
$(q_{B2}, cv_1...v_m, ZI...I\{ n paličiek\}) \vdash (q_{B3}, v_1...v_m, ZI...I\{ n paličiek\}) \vdash$
$(q_{B4}, v_2...v_m, ZI...I\{ n-1 paličiek\}) \vdash^* (q_{B4}, v_k...v_m, ZI...I\{ n-k+1 paličiek\}) \vdash$
$(q_{B6}, v_{k+1}...v_m, ZI...I\{ n-k paličiek\}) \vdash^* (q_{B6}, \varepsilon, ZI) \vdash (q_{B7}, \varepsilon, Z) \vdash$ **(q_{F6}, ε, Z)**

II.) $u \neq \{1\}^+$, t.j. $u = \{1\}^+0\{0,1\}^*$ - prvá nula je na k-tom mieste zľava

$(q_0, u_1...u_ncv_1...v_m, Z) \vdash (q_{B1}, u_1...u_ncv_1...v_m, Z) \vdash (q_{B2}, u_2...u_ncv_1...v_m, ZI) \vdash^*$
$(q_{B2}, u_k...u_ncv_1...v_m, ZI...I\{ k-1 paličiek\}) \vdash (q_{B8}, u_{k+1}...u_nv_1...v_m, ZI...I\{ k paličiek\})$
$\vdash^* (q_{B8}, cv_1...v_m, ZI...I\{ n paličiek\}) \vdash (q_{B9}, v_1...v_m, ZI...I\{ n paličiek\}) \vdash$
$(q_{B10}, v_2...v_m, ZI...I\{ n-1 paličiek\}) \vdash^* (q_{B10}, \varepsilon, ZI) \vdash (q_{B11}, \varepsilon, Z) \vdash$ **(q_{F8}, ε, Z)**

b. **$m - n = 1$**

I.) $u = \{1\}^+$

α.) $v = 1\{0\}^*1$(lebo ak by $v = 1\{0\}^*$, tak by v bolo successor u, čo je spor s $v \neq Succ(u)$)

$(q_0, u_1...u_ncv_1...v_m, Z) \vdash (q_{B1}, u_1...u_ncv_1...v_m, Z) \vdash (q_{B2}, u_2...u_ncv_1...v_m, ZI) \vdash^*$
$(q_{B2}, cv_1...v_m, ZI...I\{ n paličiek\}) \vdash (q_{B3}, v_1...v_m, ZI...I\{ n paličiek\}) \vdash$
$(q_{B4}, v_2...v_m, ZI...I\{ n-1 paličiek\}) \vdash^* (q_{B4}, v_m, ZI) \vdash$ **(q_{F4}, ε, Z)**

β.) $v \neq 1\{0\}^*1$, t.j. $v = 1\{0\}^*1\{0,1\}^+$ - druhá jednotka je na k-tom mieste zľava

$(q_0, u_1...u_ncv_1...v_m, Z) \vdash (q_{B1}, u_1...u_ncv_1...v_m, Z) \vdash (q_{B2}, u_2...u_ncv_1...v_m, ZI) \vdash^*$
$(q_{B2}, cv_1...v_m, ZI...I\{ n paličiek\}) \vdash (q_{B3}, v_1...v_m, ZI...I\{ n paličiek\}) \vdash$
$(q_{B4}, v_2...v_m, ZI...I\{ n-1 paličiek\}) \vdash^* (q_{B4}, v_k...v_m, ZI...I\{ n-k+1 paličiek\}) \vdash$
$(q_{B6}, v_{k+1}...v_m, ZI...I\{ n-k paličiek\}) \vdash^* (q_{B6}, v_m, ZI) \vdash$ **(q_{F5}, ε, Z)**

II.) $u \neq \{1\}^+$, t.j. $u = \{1\}^+0\{0,1\}^*$ - prvá nula je na k-tom mieste zľava

$(q_0, u_1...u_ncv_1...v_m, Z) \vdash (q_{B1}, u_1...u_ncv_1...v_m, Z) \vdash (q_{B2}, u_2...u_ncv_1...v_m, ZI) \vdash^*$
$(q_{B2}, u_k...u_ncv_1...v_m, ZI...I\{ k-1 paličiek\}) \vdash (q_{B8}, u_{k+1}...u_nv_1...v_m, ZI...I\{ k paličiek\})$
$\vdash^* (q_{B8}, cv_1...v_m, ZI...I\{ n paličiek\}) \vdash (q_{B9}, v_1...v_m, ZI...I\{ n paličiek\}) \vdash$
$(q_{B10}, v_2...v_m, ZI...I\{ n-1 paličiek\}) \vdash^* (q_{B10}, v_m, ZI) \vdash$ **(q_{F7}, ε, Z)**

3.) **$|u| = |v|$** , zostrojíme akceptačný výpočet pre takéto w, t.j. w = ucv, u = $u_1...u_n$, v = $v_1...v_n$ keďže sa $v \neq Succ(u)$, tak sa Succ(u) líši od v aspoň v jednom bite. Označme si jeho pozíciu ako k. Rozdeľme dôkaz opäť na dve časti:

Pozn. v {} sú poznámky

a.) u má za k-tym bitom bit 0 – označme si jeho pozíciu ako x, t.j. carry-flag ak zoberieme Succ(u) neovplyvní k-ty bit), je zrejmé, že $k \neq 1$(sporom: nech k = 1, potom sa Succ(u) a v líšia v prvom bite, keďže k-ty bit carry-flag neovplyvní, tak Succ(u) má na prvom mieste 1 a teda v musí mať na prvom mieste 0, čo je ale spor s $v = 1\{0,1\}^*$)

I.) $u_k = 0$, keďže sa v k-tom bite líšia, tak $v_k = 1$

$(q_0, u_1...u_ncv_1...v_n, Z) \vdash (q_{C1}, u_1...u_ncv_1...v_n, Z) \vdash$
$(q_{C2},u_2...u_ncv_1...v_n, Z) \vdash^* (q_{C2}, u_k...u_ncv_1...v_n, Z) \vdash$
$(q_{C3}, u_{k+1}...u_ncv_1...v_n, ZI) \vdash^* (q_{C3}, u_x...u_ncv_1...v_n, ZI...I\{$ x-k paličiek$\})$
$\vdash^* (q_{C4}, u_{x+1}...u_ncv_1...v_n, ZI...I\{$ x-k+1 paličiek$\}) \vdash^*$
$(q_{C4}, cv_1...v_n, ZI...I\{$ n-k+1paličiek$\}) \vdash$
$(q_{C5}, v_1...v_n, ZI...I\{$ n-k+1 paličiek$\}) \vdash$
$(q_{C6}, v_2...v_n, ZI...I\{$ n-k+1 paličiek$\}) \vdash^*$
$(q_{C6}, v_k...v_n, ZI...I\{$ n-k+1 paličiek$\}) \vdash$
$(q_{C7}, v_{k+1}...v_n, ZI...I\{$ n-k paličiek$\}) \vdash^* (q_{C7}, \varepsilon, Z) \vdash$ **(q_{F9}, ε, Z)**

II.) $u_k = 1$, keďže sa v k-tom bite líšia, tak $v_k = 0$

$(q_0, u_1...u_ncv_1...v_n, Z) \vdash (q_{C1}, u_1...u_ncv_1...v_n, Z) \vdash$
$(q_{C2},u_2...u_ncv_1...v_n, Z) \vdash^* (q_{C2}, u_k...u_ncv_1...v_n, Z) \vdash$
$(q_{C11}, u_{k+1}...u_ncv_1...v_n, ZI) \vdash^*$
$(q_{C11}, u_x...u_ncv_1...v_n, ZI...I\{$ x-k paličiek$\}) \vdash$
$(q_{C12}, u_{x+1}...u_ncv_1...v_n, ZI...I\{$ x-k+1 paličiek$\}) \vdash^*$
$(q_{C12}, cv_1...v_n, ZI...I\{$ n-k+1paličiek$\}) \vdash$
$(q_{C13}, v_1...v_n, ZI...I\{$ n-k+1 paličiek$\}) \vdash$
$(q_{C14}, v_2...v_n, ZI...I\{$ n-k+1 paličiek$\}) \vdash$
$(q_{C14}, v_k...v_n, ZI...I\{$ n-k+1 paličiek$\}) \vdash$
$(q_{C15}, v_{k+1}...v_n, ZI...I\{$ n-k paličiek$\}) \vdash^* (q_{C15}, \varepsilon, Z) \vdash$ **$(q_{F11}, \varepsilon, Z)$**

b.) u nemá za k-tym bitom bit 0 , t.j. carry-flag ak zoberieme Succ(u) ovplyvní k-ty bit a to tak, že preklopí tento bit – zmení jeho hodnotu z 0 na 1 a naopak)

I.) $u_k = 0$, teda $v_k = 0$(lebo v Succ(u) sa preklopí hodnota u_k z 0 na 1 a naopak, nemá zmysel uvažovať o k = 1, lebo $u_1 = 1$)

$(q_0, u_1...u_ncv_1...v_n, Z) \vdash (q_{C1}, u_1...u_ncv_1...v_n, Z) \vdash$
$(q_{C2},u_2...u_ncv_1...v_n, Z) \vdash^* (q_{C2}, u_k...u_ncv_1...v_n, Z) \vdash$
$(q_{C3}, u_{k+1}...u_ncv_1...v_n, ZI) \vdash^* (q_{C3}, cv_1...v_n, ZI...I\{$ n-k+1paličiek$\}) \vdash$
$(q_{C8}, v_1...v_n, ZI...I\{$ n-k+1 paličiek$\}) \vdash$
$(q_{C9}, v_2...v_n, ZI...I\{$ n-k+1 paličiek$\}) \vdash^*$
$(q_{C9}, v_k...v_n, ZI...I\{$ n-k+1 paličiek$\}) \vdash$
$(q_{C10}, v_{k+1}...v_n, ZI...I\{$ n-k paličiek$\}) \vdash^* (q_{C10}, \varepsilon, Z) \vdash$ **$(q_{F10}, \varepsilon, Z)$**

II.) $u_k = 1$, keďže sa v k-tom bite líšia, tak $v_k = 0$

α.) k = 1

$(q_0, u_1...u_ncv_1...v_n, Z) \vdash (q_{C1}, u_1...u_ncv_1...v_n, Z) \vdash$
$(q_{C11},u_2...u_ncv_1...v_n, ZI) \vdash^* (q_{C11}, cv_1...v_n, ZI...I\{$ n paličiek$\}) \vdash$
$(q_{C16}, v_1...v_n, ZI...I\{$ n paličiek$\}) \vdash (q_{C18}, v_2...v_n, ZI...I\{$ n-1 paličiek$\})$
$\vdash^* (q_{C18}, \varepsilon, Z) \vdash$ **$(q_{F12}, \varepsilon, Z)$**

β.) $k \neq 1$

$(q_0, u_1...u_ncv_1...v_n, Z) \vdash (q_{C1}, u_1...u_ncv_1...v_n, Z) \vdash$
$(q_{C2},u_2...u_ncv_1...v_n, Z) \vdash^* (q_{C2}, u_k...u_ncv_1...v_n, Z) \vdash$
$(q_{C11}, u_{k+1}...u_ncv_1...v_n, ZI) \vdash^* (q_{C11}, cv_1...v_n, ZI...I\{$ n-k+1 paličiek$\})$
$\vdash (q_{C16}, v_1...v_n, ZI...I\{$ n-k+1 paličiek$\}) \vdash$
$(q_{C17}, v_2...v_n, ZI...I\{$ n-k+1 paličiek$\}) \vdash^*$
$(q_{C17}, v_k...v_n, ZI...I\{$ n-k+1 paličiek$\}) \vdash$
$(q_{C18}, v_{k+1}...v_n, ZI...I\{$ n-k paličiek$\}) \vdash^* (q_{C18}, \varepsilon, Z) \vdash$ **$(q_{F12}, \varepsilon, Z)$**

A teda pre ľubovolné w, ktoré patrí do L existuje akceptačný výpočet a teda **$L \subseteq L(A)$.**
$L(A) \subseteq L \wedge L \subseteq L(A) \Rightarrow \underline{L(A) = L}$