# Prezentacia z predmetu
# Formalne jazyky a automaty

**Alexandra Baltova,**
**2i1, 13th February 2001**

# Definicie viacpaskoveho Turingovho stroja:

- nech viacpaskovy Turingov stroj ma k pasok, oznacme ho M.
- predpokladame, ze na zaciatku sa vstupne slovo zapise na vsetkych k pasok.

**Definicia 1.:** Nedeterministickym viacpaskovym Turingovym strojom nazyvame 6-ticu (K, Σ, Γ, δ, $q_0$, F). Kde K je konecna mnozina stavov, Σ je abeceda vstupnych symbolov, Γ je abeceda pracovnych symbolov ($\Sigma \subseteq \Gamma$), $q_0 \in$ K je pociatocny stav, $F \subseteq K$ je mnozina akceptacnych stavov,

$$\delta : K \times \left(\Gamma \cup \{B\}\right)^k \rightarrow 2^{K \times ((\Gamma) \times \{-1,0,1\})^k}$$

**Definicia 2.:** Konfiguracia viacpaskoveho Turingovho stroja je (k+1)-tica z
$K \times A_1 \times A_2 \times .. \times A_k$ , kde $A_i \in \left[(\Gamma - \{B\})^* \upharpoonright (\Gamma - \{B\})^* \cup \upharpoonright \; B(\Gamma - \{B\})^* \right], \forall i \in \{1,..k\}$

**Definicia 3.:** Krok vypoctu viacpaskoveho Turingovho stroj a je relacia $\vdash$ na konfiguraciach definovana nasledovne:

$$(p, c_1, c_2, ..c_k) \;\vdash\; (q, d_1, d_2, ..d_k) \Leftrightarrow (q, A_1, A_2, ..A_k) \in \delta(p, b_1, b_2, ..b_k)$$

$$\begin{array}{l} c_i \in u_i \upharpoonright \; a_i v_i \cup u_i e_i \upharpoonright \; a_i v_i \cup u_i \upharpoonright \; a_i v_i \\ d_i \in u_i b_i \upharpoonright \; v_i \cup u_i \upharpoonright \; e_i b_i v_i \cup u_i \upharpoonright \; b_i v_i \end{array} \text{, kde } \begin{array}{l} u_i, v_i \in \Gamma^*, b_i \in \Gamma, A_i = (a_i, x_i), \\ a_i \in \Gamma, x_i \in \{-1,0,1\}, \forall i \in \{1,..k\} \end{array}$$

pricom plati:
$c_i = u_i \upharpoonright \; a_i v_i \wedge d_i = u_i b_i \upharpoonright \; v_i \Leftrightarrow x_i = 1$
$c_i = u_i e_i \upharpoonright \; a_i v_i \wedge d_i = u_i \upharpoonright \; e_i b_i v_i \Leftrightarrow x_i = -1$
$c_i = u_i \upharpoonright \; a_i v_i \wedge d_i = u_i \upharpoonright \; b_i v_i \Leftrightarrow x_i = 0$

**Definicia 4.:**Jazyk akceptovany viacpaskovym Turingovym strojom je

$$L(A) = \left\{ w \in \Sigma^* \mid \left(q_0, (\upharpoonright \; Bw)^k\right) \;\vdash^* (q, u_1 \upharpoonright \; v_1, u_2 \upharpoonright \; v_2, ...u_k \upharpoonright \; v_k), u_i, v_i \in \Gamma^*, q \in F \right\}$$

Pokusime sa teraz zostrojit jednopaskovy Turingov stroj, ktory nam odsimuluje nas zadefinovany viacpaskovy, oznacme ho M'.

Nech je to nedeterministicky Turingov stroj, t.j. 6-tica (K', Σ', Γ', δ', $q_0$', F'), kde

K' = K ∪ {$q_0$, $q_1$, $q_z$, $q_{pqs}$, $q_{pqi}$, $q_{pqi1}$, $q_{pqi-1}$, $q_{pqi2}$, $q_{pqi-2}$, $q_{pqi2a}$, $q_{pqi-2a}$, $q_{pqi21}$, $q_{pqi-21}$, $q_{pqiv}$,
kde p,q ∈ K, i ∈ {1..k}}

Σ' = Σ

$$\Gamma' = \Gamma \cup \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ : \\ a_k \\ d \end{pmatrix}; a_1,..,a_k \in \Gamma \cup \{B\}; d \in \{*, z\} \right\}$$

F’ = $\{q_{qrs}; q \in F\}$

Formalne popisana δ- funkcia nasho TS:
!!! dolezite poznamenat je, ze zapisovane Blanky uz nie su povodne ale v podstate nase cleny (k+1)-tice.

1. okopirujem slovo na k stop, plus doplnim pomocnu spodnu, nultu vrstvu, kde si ako prvy znak dam specialny symbol * ku ktorej sa budem vracat, inak davam z.

$$1:\ \delta'(q_0', b) = \left\{ \begin{pmatrix} q_1, \begin{pmatrix} b \\ : \\ b \\ * \end{pmatrix} \end{pmatrix}, 1; b \in \Gamma' \right\}$$

$$2:\ \delta'(q_1, b) = \left\{ \begin{pmatrix} q_1, \begin{pmatrix} b \\ : \\ b \\ z \end{pmatrix} \end{pmatrix}, 1; b \in \Gamma' \right\}$$

$$3:\ \delta'(q_1, B) = \left\{ \begin{pmatrix} q_z, \begin{pmatrix} B \\ : \\ B \end{pmatrix}, -1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. pomocou stavu $q_z$ sa presuvam na zaciatok slova a nastavujem sa na prvy poschodovy znak, rozny od blankoveho. Presuvam sa do specialneho stavu $q_{pqs}$.

$$4:\ \delta'\left( q_z, \begin{pmatrix} b \\ : \\ b \\ d \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} q_z, \begin{pmatrix} b \\ : \\ b \\ d \end{pmatrix}, -1 \end{pmatrix}; b \in \Gamma'; d \in \{*, z\} \right\}$$

$$5:\ \delta'(q_z, B) = \left\{ \begin{pmatrix} q_{pqs}, \begin{pmatrix} B \\ : \\ B \end{pmatrix}, 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3. zacinam so spracovavanim slova.

6: $$\delta'\left(q_{pqs},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \\ * \end{pmatrix}\right)=\left\{\left(q_{pq1},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \\ * \end{pmatrix},0\right);\forall b\in\Gamma'\right\}$$

zovseobecnujem pre i, kde i ∈ {1..k} oznacuje stopu.

4. teraz mam niekolko moznosti, bud sa hlava na danej stope mala posunut doprava, dolava, alebo ostat na mieste.
   a) hlava ostava na mieste, t.j $x_i = 0$ v prislusnom $A_i$.

7: $$\delta'\left(q_{pqi},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b \\ * \end{pmatrix}\right)=\left\{\left(q_{pqi+1},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ b \\ * \end{pmatrix},0\right);b\in\Gamma';a_i,b_i\in\Gamma';i\in\{1..k\}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \delta(p,b_1,..b_{i-1},b_i,b_{i+1},..b_k)=\{(q,A_1,..A_{i-1},a_i,0,A_{i+1},..A_k)\}$$

   - prejdem na spracovavanie (i+1)-vej stopy.

   b) hlava sa posuva doprava, t.j. $x_i = 1$ v prislusnom $A_i$. Posunieme cele slovo na prislusnej stope o 1 znak dolava, cim docielime, aby bol citanym znakom znak, ktory nasleduje bezprostredne za momentalne citanym. Prepisem prislusny symbol.

8: $$\delta'\left(q_{pqi},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b \\ * \end{pmatrix}\right)=\left\{\left(q_{pqi1},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ b \\ * \end{pmatrix},-1\right);b\in\Gamma';a_i,b_i\in\Gamma'\right\}$$

$$\Leftrightarrow \delta(p,b_1,..b_{i-1},b_i,b_{i+1},..b_k)=\{(q,A_1,..A_{i-1},a_i,1,A_{i+1},..A_k)\}$$

   - presuniem sa na zaciatok slova

9: $$\delta'\left(q_{pqi1},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right)=\left\{\left(q_{pqi1},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix},-1\right);b\in\Gamma';b_i\in\Gamma';d\in\{*,z\}\right\}$$

   - ked narazim na blank, vratim sa o jeden znak spat.

$$10:\ \delta'\left(q_{pqi1},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right)=\left\{\left(q_{pqi2},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix},1\right);b\in\Gamma'\cup B;d\in\{*,z,B\}\right\}$$

- zapamatam si v specialnom stave, o aky znak sa jednalo

$$11:\ \delta'\left(q_{pqi2},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ a \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right)=\left\{\left(q_{pqi2a},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix},-1\right);b\in\Gamma';a\in\Gamma';d\in\{*,z,B\}\right\}$$

- vratim sa o jedno naspat a tam ten znak zapisem.

$$12:\ \delta'\left(q_{pqi2a},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right)=\left\{\left(q_{pqi21},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ a \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix},1\right);b\in\Gamma';a\in\Gamma';d\in\{*,z,B\}\right\}$$

- este sa posuniem o jeden znak doprava

$$13:\ \delta'\left(q_{pqi21},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right)=\left\{\left(q_{pqi2},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix},1\right);b\in\Gamma';d\in\{*,z,B\}\right\}$$

- vrati sa k stavu $q_{pqi2}$, z ktoreho prechadza k zapamataniu a naslednemu posunu dalsieho pismenka.

- takto automat postupne posunie cele slovo dolava
- ak δ- funkcia zo stavu $q_{pqi2}$ narazi na blank, znamena to, ze posunul cele slovo a tak sa moze citacia hlava vratit na specialny symbol symbol, ktorym sme si zapamatali povodnu poziciu hlavy a prejst k spracovaniu (i+1)-vej stopy.

$$14:\ \delta'\left(q_{pqi2},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right)=\left\{\left(q_{pqiv},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix},-1\right);b\in\Gamma';d\in\{*,z,B\}\right\}$$

c) hlava sa posuva dolava, t.j. $x_i = -1$ v prislusnom $A_i$. Posunieme cele slovo na prislusnej stope o 1 znak doprava, cim docielime, aby bol citanym znakom znak, ktory nasleduje bezprostredne pred momentalne citanym.

15: $$\delta'\left(q_{pqi},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b \\ * \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(q_{pqi-1},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ b \\ * \end{pmatrix},1\right); b \in \Gamma'; b_i, a_i \in \Gamma'; d \in \{*, z\}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \delta(p, b_1, ..b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, ..b_k) = \{(q, A_1, ...A_{i-1}, a_i, -1, A_{i+1}, ..A_k)\}$$

- zacnem sa presuvat na koniec slova

16: $$\delta'\left(q_{pqi-1},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(q_{pqi-1},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix},1\right); b \in \Gamma'; b_i \in \Gamma'; d \in \{*, z, B\}\right\}$$

- ked narazim na blank, vratim sa o jeden znak spat.

17: $$\delta'\left(q_{pqi-1},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(q_{pqi-2},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix},-1\right); b \in \Gamma'; d \in \{*, z, B\}\right\}$$

- zapamtam si v specialnom stave, o aky znak sa jednalo

18: $$\delta'\left(q_{pqi-2},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ a \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(q_{pqi-2a},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix},1\right); b \in \Gamma'; a \in \Gamma'; d \in \{*, z, B\}\right\}$$

- vratim sa o jedno naspat a tam ten znak zapisem.

19: $$\delta'\left(q_{pqi-2a},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(q_{pqi-21},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix},-1\right); b \in \Gamma'; a_i, b_i \in \Gamma'; d \in \{*, z, B\}\right\}$$

- este sa posuniem o jeden znak doprava

$$20:\ \delta'\left(q_{pqi-21},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right)=\left\{\left[\left(q_{pqi-2},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix},-1\right);b\in\Gamma';b_i\in\Gamma';d\in\{*,z,B\}\right\}\right.$$

- vrati sa k stavu $q_{pqi-2}$, z ktoreho prechadza k zapamataniu a naslednemu posunu dalsieho pismenka.
- takto automat postupne posunie cele slovo dolava
- ak δ- funkcia zo stavu $q_{pqi-2}$ narazi na blank, znamena to, ze posunul cele slovo a tak sa moze citacia hlava vratit na specialny symbol, ktorym sme si zapamatali povodnu poziciu hlavy a prejst k spracovaniu (i+1)-vej vrstvy.

$$21:\ \delta'\left(q_{pqi-2},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right)=\left\{\left[\left(q_{pqiv},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix},1\right);b\in\Gamma';d\in\{*,z,B\}\right\}\right.$$

5. pomocou stavu $p_{pqiv}$ sa dostanem k nasmu specialnemu symbolu a mozem pokracovat v citani slova

$$22:\ \delta'\left(q_{pqiv},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right)=\left\{\left[\left(q_{pqiv},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix},1\right);b\in\Gamma';d\in\{z,B\}\right\}\right.$$

$$23:\ \delta'\left(q_{pqiv},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right)=\left\{\left[\left(q_{pqiv},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix},-1\right);b\in\Gamma';d\in\{z,B\}\right\}\right.$$

$$24:\ \delta'\left(q_{pqiv},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ b \\ * \end{pmatrix}\right)=\left\{\left[\left(q_{pq(i+1)},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ b \\ * \end{pmatrix},0\right);b\in\Gamma'\right\}\right.$$

6. ak som dosiahla spracovanie k-tej vrstvy, znamena to, ze som spracovala krok viacpaskoveho automatu a mozem akceptovat, respektive prejst k spracovavaniu dalsej katice.

$$25:\ \delta'\left(q_{pqkv},\begin{pmatrix}b\\:\\b\\:\\b*\end{pmatrix}\right)=\left\{\left(q_{qrs},\begin{pmatrix}b\\:\\b\\:\\b*\end{pmatrix},0\right);b\in\Gamma'\right\}\Leftrightarrow\delta(q,b_1..b_k)=\{(r,A_1,..A_k)\}$$

7. akceptujem, ak sa dostanem do akceptacneho stavu. Ak v povodnom automate bol akceptacny stav q, v nasom novom bude akceptacny stav $q_{qrs}$.

**Dokaz:** Dokazeme, ze tieto Turingove stroje akceptuju ten isty jazyk, t.j. L(M) = L(M'). A to pomocou dvoch inkluzii

**A) L(M) ⊆ L(M')**

Kazde slovo z jazyka L(M) akceptuje automat M'.

Po n krokoch odvodenia viacpaskovym automatom a po n sekvenciach (kde sekvencia je postupnost krokov vypoctu jednopaskoveho automatu zodpovedajucich jednemu kroku viacpaskoveho automatu) bude hlava v jednopaskovom automate na tej k-tici, ktora bude zodpovedat poziciam hlav viacpaskoveho automatu, a ak viacpaskovy TS sa nachadzal v stave p a nachadza sa v stave q, jednopaskovy automat sa bude nachadzat v stave $q_{pqkv}$ a z tohoto stavu prejde do stavu $q_{qrs}$ a v pripade ze stav q je akceptujuci, potom aj nas stav $q_{qrs}$ bude akceptacny (co vyplyva z definicie δ'- funkcie).

Dokaz matematickou indukciou vzhladom na pocet krokov odvodenia:

1° pre n = 1.

- na zaciatku celeho vypoctu sa vstupne slovo okopiruje na vsetkych k- stop pasky jednopaskoveho automatu a automat sa bude nachadzat v stave $q_z$, a prvy stlpec bude oznaceny specialnym symbolom *.
- pred prvym krokom mam k pasok, pricom na kazdej paske je vstupne slovo a citacie hlavy su na zaciatku pasok – v jednopaskovom automate som nastavena na prvej k-tici, ktora zodpoveda k-tici prvych symbolov vstupneho slova.
- ak sa viacpaskovy automat pohol zo stavu q do stavu p, jednopaskovy automat sa zo stavu $q_z$ pohne do stavu $q_{qps}$. V tomto stave sa zacne vykonavat postupnost krokov, ktora zodpoveda jednemu posunu vsetkych hlav viacpaskoveho automatu, vratane posuvania stop v jednopaskovom automate. Po tejto sekvencii sa jednopaskovy automat bude nachadzat v stave $q_{qpkv,}$ ktory je zaverecnym stavom sekvencie zodpovedajucej prechodu viacpaskoveho automatu zo stavu q do stavu p, ak viacpaskovy automat sa nachadza v stave p.
- Popis sekvencie jednopaskoveho automatu zodpovedajucej jednemu kroku vypoctu viacpaskoveho:
    - ak sa i-ta hlava na i-tej paske posunula dolava, cele slovo som posunula doprava, tak som zarucila, aby bol citany najlavejsi znak od momentalne citaneho symbolu na i-tej stope, co zodpoveda i-tej paske a i-tej citacej hlave na nej. Znak som prepisala tak, ako prepisal znak povodny automat.

- ak sa i-ta hlava na i-tej paske posunula doprava, cele slovo som posunula dolava, tak som zarucila, aby bol citany najpravejsi znak od momentalne citaneho symbolu na i-tej stope, co zodpoveda i-tej paske a i-tej citacej hlave na nej. Znak som prepisala tak, ako prepisal znak povodny automat.
- ak sa i-ta hlava na i-tej paske neposunula, neposunula som ani slovo, t.j. pre dalsi krok som citala ten isty symbol ako momentalny symbol na i-tej stope, co zodpoveda i-tej paske a i-tej citacej hlave na nej. Znak som prepisala tak, ako prepisal znak povodny automat.

2° Indukcny predpoklad je, ze po n krokoch vypoctu viacpaskoveho automatu sa prislusna simulacia na jednopaskovom stroji nachadza v konfiguracii, kde si stavy vzajomne zodpovedaju a citana k-tica zodpoveda postupnosti citanych znakov jednotlivymi hlavami viacpaskoveho automatu.

- v (n+1). kroku sa opat kazda hlava posunie doprava, dolava, respektive ostane na mieste. TS sa presunie do niektoreho zo stavov, respektive zotrva v povodnom.
- Opat sa vykona prislusna sekvencia jednopaskoveho automatu. Sledovanim casti δ'- funkcie 5- 24, ktore vlastne simuluju vypocet a spracovanie jednotlivych symbolov na stopach pasky tak, aby zodpovedali praci hlav viacpaskoveho automatu. Inymi slovami pomocou nami zostrojenej δ'- funkcie viem opat spracovat danu k-ticu $A_1..A_k$ postupne v jednotlivych stopach novo zostrojenej pasky.

Tato cast dokazu viacmenej vyplyva z konstrukcie jednopaskoveho automatu, ktory bol zostrojeny tak, aby simuloval kazdy krok vypoctu jednopaskoveho.

**B) L(M') $\subseteq$ L(M)**

Kazde slovo z jazyka L(M') akceptuje automat M.

- v tejto casti dokazu chcem ukazat, ze to vsetko co bude akceptovat jednopaskovy automat, vie akceptovat aj automat viacpaskovy.
- majme slovo w, ktore je akceptovane jednopaskovym automatom. Vezmime si vypocet na slove w. Da sa rozdelit na sekvencie, zacinajuce a konciace stavmi $q_{pqkv}$, z ktorych kazda zodpoveda uprave vsetkych stop jednopaskoveho automatu. Kazdej takejto sekvencii vieme podla δ'-funkcie jednoznacne priradit jeden krok vypoctu automatu M. Kazda hlava vykona to, co sa vykonalo na prislusnej stope jednopaskoveho stroja. To znamena, ze zapise resp. nezapise nieco na pasku a posunie sa urcitym smerom, alebo sa neposunie. Samozrejme, sem neratame sekvenciu, ktora vytvara viacstopu pasku a presuva sa po jej vytvoreni na zaciatok. Na konci vypoctu jednopaskoveho automatu sme skoncili v nejakom stave $q_{qrs}$, ktory zodpoveda podla definicie δ'–funkcie niektoremu akceptacnemu stavu automatu M. Takto sme nasli vypocet pre automat M, ktory skonci akceptovanim slova w. Akceptacny vypocet dostaneme z postupnosti stavov $q_{pqkv}$ , ktorymi konci kazda sekvencia. Ak sekvencia konci stavom $q_{pqkv}$, tak prislusny prechod v automate M bude $p \rightarrow q$ a prislusne operacie na paske pre i-tu hlavu dostaneme z toho, co sa robilo v prislusnej sekvencii s i-tou stopou. Formalny zapis je zlozity, vzhladom na zlozitost δ'–funkcie a preto nie je uvedeny. Bude dokumentovany na castiach δ'-funkcie priamo na prezentacii.