Definície viacpáskového Turingovho stroja

Definícia 1.: Nedeterministickým viacpáskovým Turingovým strojom nazývame 6-ticu

$$M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F).$$

K - konečná množina stavov

Σ - abeceda vstupných symbolov

Γ - abeceda pracovných symbolov ($\Sigma \subseteq \Gamma$)

$q_0 \in$ K - počiatočný stav

F $\subseteq$ K - množina akceptačných stavov

$$\delta : K \times \left(\Gamma \cup \{B\}\right)^k \rightarrow 2^{K \times \left((\Gamma) \times \{-1,0,1\}\right)^k}$$

Definícia 2.: Konfigurácia viacpáskového Turingovho stroja je (k+1)-tica z

$$K \times A_1 \times A_2 \times .. \times A_k \text{ , kde}$$

$$A_i \in \left[(\Gamma - \{B\})^* \upharpoonright (\Gamma - \{B\})^* \cup \upharpoonright B(\Gamma - \{B\})^*\right], \forall i \in \{1,..k\}$$

Definícia 3.: Krok výpočtu viacpáskového

Turingovho stroja je relácia $\vdash$ na konfiguráciách definovaná nasledovne:

$$\boxed{\begin{aligned}&(p, c_1, c_2, ..c_k) \ \vdash (q, d_1, d_2, ..d_k) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (q, A_1, A_2, ..A_k) \in \delta(p, b_1, b_2, ..b_k)\end{aligned}}$$

$$c_i \in u_i \uparrow \ a_i v_i \cup u_i e_i \uparrow \ a_i v_i \cup u_i \uparrow \ a_i v_i$$
$$d_i \in u_i b_i \uparrow \ v_i \cup u_i \uparrow \ e_i b_i v_i \cup u_i \uparrow \ b_i v_i \ \text{, kde}$$

$$u_i, v_i \in \Gamma^*, b_i \in \Gamma, A_i = (a_i, x_i),$$
$$a_i \in \Gamma, x_i \in \{-1,0,1\}, \forall i \in \{1,..k\}$$

pričom platí:

$$\boxed{\begin{aligned}&c_i = u_i \uparrow \ a_i v_i \wedge d_i = u_i b_i \uparrow \ v_i \Leftrightarrow x_i = 1 \\ &c_i = u_i e_i \uparrow \ a_i v_i \wedge d_i = u_i \uparrow \ e_i b_i v_i \Leftrightarrow x_i = -1 \\ &c_i = u_i \uparrow \ a_i v_i \wedge d_i = u_i \uparrow \ b_i v_i \Leftrightarrow x_i = 0\end{aligned}}$$

Definícia 4.: Jazyk akceptovaný viacpáskovým Turingovým strojom je

$$L(A) = \left\{ \begin{aligned} &w \in \Sigma^* \mid \left(q_0, (\uparrow \ Bw)^k\right) \ \vdash^* \\ &\vdash^* (q, u_1 \uparrow \ v_1, u_2 \uparrow \ v_2, ...u_k \uparrow \ v_k), u_i, v_i \in \Gamma^*, q \in F \end{aligned} \right\}$$

- jednopáskový TS, kt. odsimuluje viacpáskový,

nedeterministický TS, t.j. 6-tica

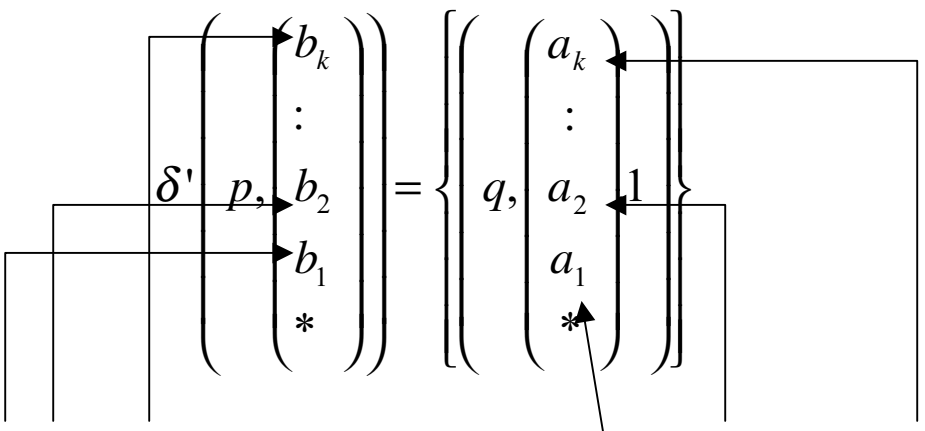
$M' = (K', \Sigma', \Gamma', \delta', q_0', F')$, kde

$K' = K \cup \{q_0, q_1, q_z, q_{pqs}, q_{pqi}, q_{pqi1}, q_{pqi-1}, q_{pqi2}, q_{pqi-2}, q_{pqi2a}, q_{pqi-2a}, q_{pqi21}, q_{pqi-21}, q_{pqiv},$ kde $p,q \in K, i \in \{1..k\}\}$

$$\Sigma' = \Sigma$$

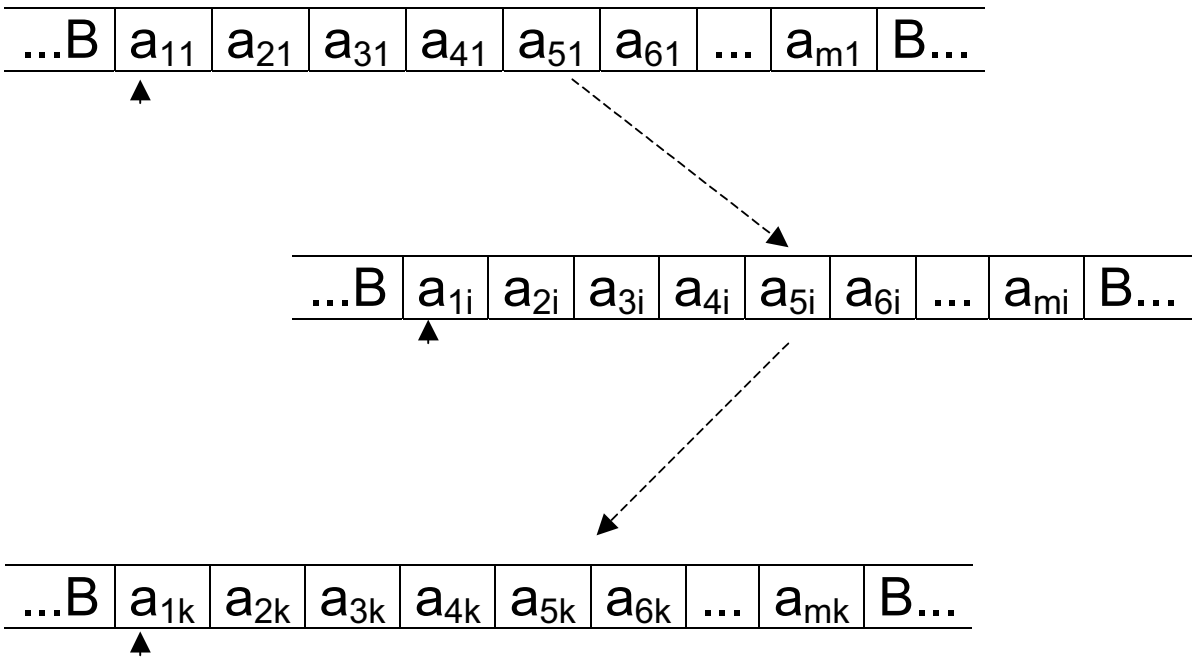
$$\Gamma' = \Gamma \cup \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ : \\ a_k \\ d \end{pmatrix}; a_1,..,a_k \in \Gamma \cup \{B\}; d \in \{*, z\} \right\}$$

$F' = \{q_{qrs}; q \in F\}$

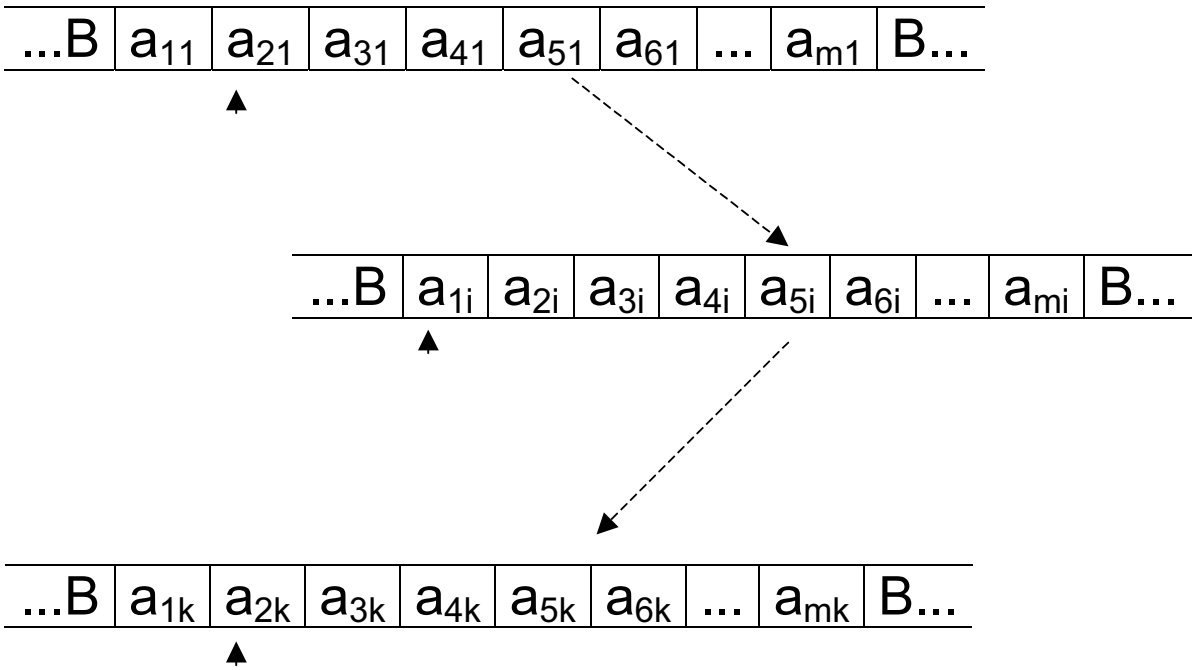


$$\delta(p, b_1, b_2, ..b_k) ..... = ...\{(q, a_1, x_1, a_2, x_2, ...a_k, x_k)\}$$

$$a_i, b_i \in \Gamma, x_i \in \{-1,0,1\}, \forall i \in \{1..k\}$$



...B	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{41}	a_{51}	a_{61}	...	a_{m1}	B...
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
...B	a_{1i}	a_{2i}	a_{3i}	a_{4i}	a_{5i}	a_{6i}	...	a_{mi}	B...
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
...B	a_{1k}	a_{2k}	a_{3k}	a_{4k}	a_{5k}	a_{6k}	...	a_{mk}	B...
...B	*	z	z	z	z	z	z	z	B...



...B	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{41}	a_{51}	a_{61}	...	a_{m1}	B	B...
	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
...B	B	a_{1i}	a_{2i}	a_{3i}	a_{4i}	a_{5i}	a_{6i}	...	a_{mi}	B...
	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
...B	a_{1k}	a_{2k}	a_{3k}	a_{4k}	a_{5k}	a_{6k}	...	a_{mk}	B	B...
...B	B	*	z	z	z	z	z	z	z	B...

1: $$\delta'(q_0',b)=\left\{\left[\left(q_1,\begin{pmatrix}b\\ \vdots\\ b\\ *\end{pmatrix}\right),1;b\in\Gamma'\right]\right\}$$

2: $$\delta'(q_1,b)=\left\{\left[\left(q_1,\begin{pmatrix}b\\ \vdots\\ b\\ z\end{pmatrix}\right),1;b\in\Gamma'\right]\right\}$$

3: $$\delta'(q_1,B)=\left\{\left[\left(q_z,\begin{pmatrix}B\\ \vdots\\ B\end{pmatrix},-1\right)\right]\right\}$$

4: $$\delta'\left(q_z,\begin{pmatrix}b\\ \vdots\\ b\\ d\end{pmatrix}\right)=\left\{\left[\left(q_z,\begin{pmatrix}b\\ \vdots\\ b\\ d\end{pmatrix},-1\right)\right]\right\}$$

5: $$\delta'(q_z,B)=\left\{\left[\left(q_{pqs},\begin{pmatrix}B\\ \vdots\\ B\end{pmatrix},1\right)\right]\right\}$$

6: $$\delta'\left(q_{pqs},\begin{pmatrix}b\\ \vdots\\ b\\ *\end{pmatrix}\right)=\left\{\left[\left(q_{pq1},\begin{pmatrix}b\\ \vdots\\ b\\ *\end{pmatrix},0\right)\right]\right\}$$

a) hlava ostáva na mieste, t.j $x_i = 0$

7: $$\delta'\left(q_{pqi},\begin{pmatrix}b\\ \vdots\\ b_i\\ \vdots\\ b\\ *\end{pmatrix}\right)=\left\{\left[\left(q_{pqi+1},\begin{pmatrix}b\\ \vdots\\ a_i\\ \vdots\\ b\\ *\end{pmatrix},0\right);b\in\Gamma';a_i,b_i\in\Gamma';i\in\{1..k\}\right]\right\}$$

$$\Leftrightarrow \delta(p,b_1,..b_{i-1},b_i,b_{i+1},..b_k)=\{(q,A_1,..A_{i-1},a_i,0,A_{i+1},..A_k)\}$$

b)hlava sa posúva doprava, t.j. $x_i = 1$ v

8: $$\delta'\left(q_{pqi}, \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b \\ * \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(q_{pqi1}, \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ b \\ * \end{pmatrix}, -1\right); b \in \Gamma'; a_i, b_i \in \Gamma'\right\}$$

$$\Leftrightarrow \delta(p, b_1, ..b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, ..b_k) = \{(q, A_1, ...A_{i-1}, a_i, 1, A_{i+1}, ..A_k)\}$$

9: $$\delta'\left(q_{pqi1}, \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(q_{pqi1}, \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}, -1\right)\right\}$$

10: $$\delta'\left(q_{pqi1}, \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(q_{pqi2}, \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}, 1\right)\right\}$$

11: $$\delta'\left(q_{pqi2}, \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ a \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(q_{pqi2a}, \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}, -1\right)\right\}$$

12: $$\delta'\left(q_{pqi2a}, \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(q_{pqi21}, \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ a \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}, 1\right)\right\}$$

13: $$\delta'\left(q_{pqi21}, \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(q_{pqi2}, \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}, 1\right)\right\}$$

14: $$\delta'\left(q_{pqi2}, \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(q_{pqiv}, \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}, -1\right)\right\}$$

c) hlava sa posúva dolava, t.j. $x_i = -1$

15: $$\delta'\left(q_{pqi},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b \\ * \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(q_{pqi-1},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ b \\ * \end{pmatrix},1\right); b \in \Gamma'; b_i, a_i \in \Gamma'; d \in \{*, z\}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \delta(p, b_1, ..b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, ..b_k) = \{(q, A_1, ...A_{i-1}, a_i, -1, A_{i+1}, ...A_k)\}$$

16: $$\delta'\left(q_{pqi-1},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(q_{pqi-1},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix},1\right)\right\}$$

17: $$\delta'\left(q_{pqi-1},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(q_{pqi-2},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix},-1\right)\right\}$$

18: $$\delta'\left(q_{pqi-2},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ a \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(q_{pqi-2a},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix},1\right)\right\}$$

19: $$\delta'\left(q_{pqi-2a},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(q_{pqi-21},\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ b \\ d \end{pmatrix},-1\right)\right\}$$

$$20:\ \delta'\left(q_{pqi-21},\begin{pmatrix}b\\ \vdots\\ b_i\\ \vdots\\ b\\ d\end{pmatrix}\right)=\left\{\left[\left(q_{pqi-2},\begin{pmatrix}b\\ \vdots\\ b_i\\ \vdots\\ b\\ d\end{pmatrix}\right),-1\right]\right\}\qquad 21:\ \delta'\left(q_{pqi-2},\begin{pmatrix}b\\ \vdots\\ B\\ \vdots\\ b\\ d\end{pmatrix}\right)=\left\{\left[\left(q_{pqiv},\begin{pmatrix}b\\ \vdots\\ B\\ \vdots\\ b\\ d\end{pmatrix}\right),1\right]\right\}$$

$$22:\ \delta'\left(q_{pqiv},\begin{pmatrix}b\\ \vdots\\ b\\ \vdots\\ b\\ d\end{pmatrix}\right)=\left\{\left[\left(q_{pqiv},\begin{pmatrix}b\\ \vdots\\ b\\ \vdots\\ b\\ d\end{pmatrix}\right),1\right]\right\}\qquad 23:\ \delta'\left(q_{pqiv},\begin{pmatrix}b\\ \vdots\\ b\\ \vdots\\ b\\ d\end{pmatrix}\right)=\left\{\left[\left(q_{pqiv},\begin{pmatrix}b\\ \vdots\\ b\\ \vdots\\ b\\ d\end{pmatrix}\right),-1\right]\right\}$$

$$24:\ \delta'\left(q_{pqiv},\begin{pmatrix}b\\ \vdots\\ b\\ \vdots\\ b\\ *\end{pmatrix}\right)=\left\{\left[\left(q_{pq(i+1)},\begin{pmatrix}b\\ \vdots\\ b\\ \vdots\\ b\\ *\end{pmatrix}\right),0\right]\right\}$$

$$25:\ \delta'\left(q_{pqkv},\begin{pmatrix}b\\ \vdots\\ b\\ \vdots\\ b\\ *\end{pmatrix}\right)=\left\{\left[\left(q_{qrs},\begin{pmatrix}b\\ \vdots\\ b\\ \vdots\\ b\\ *\end{pmatrix}\right),0\right];b\in\Gamma'\right\}\Leftrightarrow\delta\left(q,b_1..b_k\right)=\left\{\left(r,A_1,..A_k\right)\right\}$$

ČINNOSŤ Turingovho Stroja 1.

- ✓ okopírujem slovo na k stôp, doplním pomocnú spodnú, nultú stopu - prvý znak špeciálny symbol *

- ✓ presuniem sa na začiatok slova a nastavujem sa na prvý poschodový znak, rôzny od blankového.

- ✓ začínam so spracovávaním k-tice po stopách

✓ niekoľko možností

a) hlava na príslušnej stope ostáva na mieste

→ slovo na danej stope nepremiestňujem,

prechádzam na spracovanie ďaľšej stopy

b) hlava sa na príslušnej stope posúva doprava

→ slovo na danej stope posúvam doľava

c) hlava sa na príslušnej stope posúva doľava

→ slovo na danej stope posúvam doprava

✓ po spracovaní k-tice

→ akceptujem ak som v akcept. stave, inak →

→ hlava sa posúva na špeciálny znak a

pokračuje v spracovávaní slova

Dôkaz:

- ✓ TS akceptujú ten istý jazyk, t.j. L(M) = L(M').

---

a) L(M) ⊆ L(M')

- ✓ Kazde slovo z jazyka L(M) akcept. TS M'.

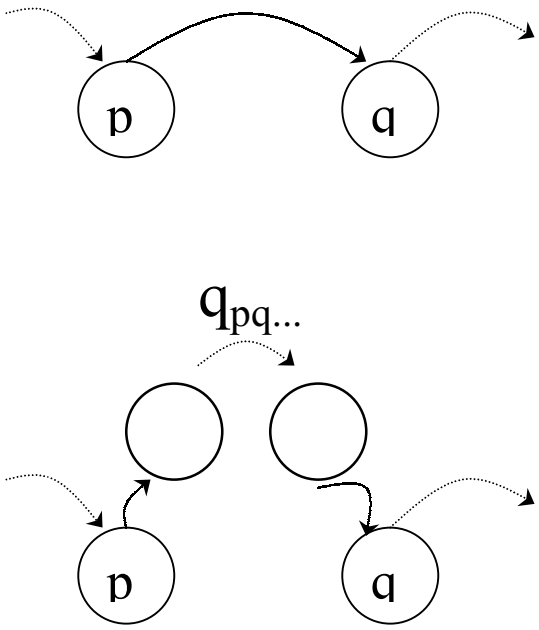
- ✓ Po n krokoch odvodenia viacpáskovým automatom a po n sekvenciách bude hlava v jednopáskovom automate na tej k-tici, kt. bude zodpovedať pozíciám hláv viacpáskového TS

- ✓ ak sa viacpáskový TS nachádzal v stave p a nachádza sa v stave q, jednopáskový automat sa bude nachádzať v stave q_{pqkv} a z tohoto stavu prejde do stavu q_{qrs}, v prípade že stav q je akceptujúci, potom aj stav q_{qrs} v M' bude akceptačný

- ✓ MI vzhľadom na počet krokov odvodenia

b)L(M') $\subseteq$ L(M)

- ✓ Každé slovo z jazyka L(M') akceptuje TS M.
- ✓ máme slovo w akceptované jednopáskovým TS
- ✓ Výpočet na slove w sa dá rozdelit na sekvencie, začínajúce a končiace stavmi q_{pqkv}, z kt. každá zodpovedá úprave všetkých stôp jednopásk. TS. Každej takejto sekvencii vieme podľa δ'-funkcie jednoznačne priradiť jeden krok výpočtu TS M.
- ✓ Každá hlava vykoná to, čo sa vykonalo na príslušnej stope jednopáskového stroja
- ✓ Na konci výpočtu jednopáskového TS sme skončili v nejakom stave q_{qrs}, ktorý zodpovedá podľa definície δ'–funkcie niektorému akceptačnému stavu automatu M
- ✓ Takto sme našli výpočet pre automat M, ktorý skončí akceptovaním slova w.



SEKVENCIA: postupnosť krokov výpočtu jednopáskového automatu zodpovedajúcich jednému kroku viacpáskového automatu