Boris Smažák - Prezentácia úlohy č. 4

Zadanie :Zostrojte kontextovú gramatiku G pre jazyk

$$L = \{ ww^R w \mid w \in \{a,b\}^+ \}$$

A dokážte správnosť svojej konštrukcie (t.j. L = L(G)).

Riešenie : G = { N, T, P, σ }, kde

T = { a,b }

N = { α, β, σ, δ, ψ, φ }

P = {
$\sigma \to aaa \mid bbb \mid a\delta a\psi \mid b\delta b\varphi$,
$\delta \to a\alpha\delta a \mid b\beta\delta b \mid a\alpha a \mid b\beta b$,
$\alpha a \to a\alpha$,
$\alpha b \to b\alpha$,
$\beta a \to a\beta$,
$\beta b \to b\beta$,
$\alpha\psi \to \psi a$,
$\beta\psi \to \psi b$,
$\alpha\varphi \to \varphi a$,
$\beta\varphi \to \varphi b$,
$\varphi \to b$,
$\psi \to a$ }

Dôkaz : $L(G) \subseteq L$

Nech $w \in L(G)$, potom existuje odvodenie v G $\sigma \Rightarrow w_1 \Rightarrow ... \Rightarrow w_n = w$.

Zadefinujme 2 homomorfizmy :

$h_1 : (N \cup T)^* \to T^*$
$h_1(u) = a , u \in \{a, \psi\}$
$h_1(v) = b , v \in \{b, \varphi\}$
$h_1(x) = \varepsilon , x \in \{\alpha, \beta, \sigma, \delta\}$
$h_2 : (N \cup T)^* \to T^*$
$h_2(\alpha) = a$
$h_2(\beta) = b$
$h_2(u) = \varepsilon , u \in \{a, b, \sigma, \delta, \psi, \varphi\}$

Dokážem, že v každom kroku odvodenia bude vetná forma w_i v tvare xzy, kde $x \in ((N \cup T) - \{ \psi, \varphi \})^+$, $y \in \{ \psi, \varphi, \varepsilon \}$, $z \in T^*$, pričom ak $y = \varepsilon$ tak aj $z = \varepsilon$, a bude platiť $h_1(xz).h_2(xz).y \in L$.

Použijem matematickú indukciu na počet krokov n v odvodení.

Nech i=1, rozpoznávame 4 prípady :

1. $w_1 = aaa$, x = aaa, $z = \varepsilon$, $y = \varepsilon$. Tvrdenie triviálne platí, pretože $aaa \in L$.
2. $w_1 = bbb$, x = bbb, $z = \varepsilon$, $y = \varepsilon$. Tvrdenie triviálne platí, pretože $bbb \in L$.
3. $w_1 = a\delta a\psi$, x = aδa, $z = \psi$, $y = \varepsilon$. Ďalej platí : $h_1(xz) = aaa$, $h_2(xz) = \varepsilon$, a teda $h_1(xz).h_2(xz).y = aaa \in L$, čiže tvrdenie triviálne platí.
4. $w_1 = b\delta b\varphi$, x = bδb, $z = \varphi$, $y = \varepsilon$. Ďalej platí : $h_1(xz) = bbb$, $h_2(xz) = \varepsilon$, a teda $h_1(xz).h_2(xz).y = bbb \in L$, čiže tvrdenie triviálne platí.

Teda tvrdenie platí pre i = k. Ďalej dokážem, že tvrdenie platí aj pre i = k + 1.

Rozlišujeme 2 prípady :

1. Ak $\delta \in w_k$, potom môžeme použiť nasledujúce pravidlá
   a) $\delta \to a\alpha\delta a$. Podľa IP platilo tvrdenie pre w_k a teda $w_k = xzy$, $h_1(xz).h_2(xz).y = vv^Rv$, $v \in T$. Po použití pravidla je ľahko vidieť, že ak $w_{k+1} = x'z'y'$, platí $h_1(x'z').h_2(x'z').y' = vaav^Rva \in L$. Čiže tvrdenie platí.

b) $\delta \rightarrow b\beta\delta b$. Situácia je podobná ako za a) , iba
$h_1(x'z').h_2(x'z').y' = vbbv^Rvb \in L$.

c) $\delta \rightarrow a\alpha a$. Situácia je rovnaká ako za a), pretože $h_1(\delta) = \varepsilon$, $h_2(\delta) = \varepsilon$.

d) $\delta \rightarrow b\beta b$. Situácia je rovnaká ako za b), pretože $h_1(\delta) = \varepsilon$, $h_2(\delta) = \varepsilon$.

e) $\alpha a \rightarrow a\alpha$

f) $\alpha b \rightarrow b\alpha$

g) $\beta a \rightarrow a\beta$

h) $\beta b \rightarrow b\beta$

Prípady e) až h) sú podobné, pretože meníme iba poradie terminálu a neterminálu, čo nemá vplyv na výsledok po zobrazení oboma homorfizmami. A teda bude platiť $h_1(x'z').h_2(x'z').y' = vv^Rv$, ak $w_{k+1} = x'z'y'$.

i) $\varphi \rightarrow b$

j) $\psi \rightarrow a$

Prípady i) a j) nemôžu nastať, pretože by vo vetnej by neskôr vznikol neterminál α alebo β, ktoré by sme nevedeli upraviť na terminály, čo je v spore s predpokladom (existencia odvodenia).

l) Ostatné pravidlá nemôžem použiť, pretože neterminály α a β sa generujú pred neterminálom δ a pravidlá nepovolujú zmenu poradia už generovaných neterminálov (iba ich prípadnú zmenu a iné terminály a neterminály), a teda sa nemohli posunúť k neterminálom φ alebo ψ, ktoré môžu byť až za neterminálom δ.

2. Ak $\delta \notin w_k$, potom môžeme použiť nasledujúce pravidlá

a) $\alpha a \rightarrow a\alpha$

b) $\alpha b \rightarrow b\alpha$

c) $\beta a \rightarrow a\beta$

d) $\beta b \rightarrow b\beta$

Prípady a) až d) sú podobné, pretože meníme iba poradie terminálu a neterminálu, čo nemá vplyv na výsledok po zobrazení oboma homorfizmami. A teda bude platiť $h_1(x'z').h_2(x'z').y' = vv^Rv$, ak $w_{k+1} = x'z'y'$.

e) $\varphi \rightarrow b$

f) $\psi \rightarrow a$

Po použití pravidiel za e) alebo za f) môžu nastať 2 prípady :

I. w_{k+1} neobsahuje neterminály α a β : Potom však obsahuje len samé terminály. Lenže ak tvrdenie platilo pre w_k bude platiť aj pre w_{k+1}, pretože terminál $a \in x'$, ak $w_{k+1} = x'z'y'$, $h_1(x') = h_1(xz).h_2(xz).y \in L$ a zároveň $y' = \varepsilon$ a $z' = \varepsilon$.

II. w_{k+1} obsahuje neterminály α a β, ktoré nevieme upraviť na terminály, čo je v spore s predpokladom (existencia odvodenia), takže tento prípad nemôže nastať.

g) $\alpha\psi \rightarrow \psi a$

h) $\beta\psi \rightarrow \psi b$

i) $\alpha\varphi \rightarrow \varphi a$

j) $\beta\varphi \rightarrow \varphi b$

Prípady g) až j) sú tiež obdobné. Nech $w_k = xzy$, $h_1(xz) = p$, $h_2(xz) = qr$, kde $p,q \in T^*$, $r \in \{ a,b \}$. Po použití pravidla bude platiť : $h_1(x'z') = p$, $h_2(x'z') = q$ a $y' = ry$, ak $w_{k+1} = x'z'y'$, a zároveň $h_1(x'z').h_2(x'z').y' = h_1(xz).h_2(xz).y \in L$.

Čím sme dokázali, že $L(G) \subseteq L$.

$L \subseteq L(G)$
Nech $w=vv^Rv \in L$. Nech $v=v_1\ v_2 \ldots\ v_n$.
Treba nájsť odvodenie v G. Postupujme nasledovne :
Matematickou indukciou vzhľadom na k dokážem, že viem odvodiť vetnú formu u, pre ktorú bude platiť : $\delta \in u$, $\varphi \in u$ alebo $\psi \in u$, $u=xzy$, $h_1(xz)h_2(xz)y = v_1\ v_2 \ldots\ v_k$. (Pričom bude platiť to isté ako v prvej inklúzii, t.j. $x \in ((N \cup T) - \{ \psi, \varphi \})^+$, $y \in \{ \psi, \varphi, \varepsilon \}$, $z \in T^*$, pričom ak $y = \varepsilon$ tak aj $z = \varepsilon$.)
Nech k = 1. Rozlišujeme 2 prípady :

1) $v_1 = a$. Vetnú formu odvodíme nasledovene : $\sigma \rightarrow a\delta a\psi$.

2) $v_1 = b$. Vetnú formu odvodíme nasledovene : $\sigma \rightarrow b\delta b\varphi$.

Nech $k = i + 1$. Podľa indukčného predpokladu vieme odvodiť u, pre ktorú bude platiť : $\delta \in u$, $\varphi \in u$ alebo $\psi \in u$, $u=xzy$, $h_1(xz)h_2(xz)y = v_1\ v_2 \ldots\ v_i$.
Znova rozlišujeme 2 prípady

1) $v_{i+1} = a$. Vetnú formu odvodíme nasledovene : $\delta \rightarrow a\delta a\psi$.

2) $v_{i+1} = b$. Vetnú formu odvodíme nasledovene : $\delta \rightarrow b\delta b\varphi$.

Čím sme dokázali, že vieme odvodiť vetnú formu u, pre ktorú bude platiť : $\delta \in u$, $\varphi \in u$ alebo $\psi \in u$, $u=xzy$, $h_1(xz)h_2(xz)y = v_1\ v_2 \ldots\ v_{n-1}$. Takže existuje odvodenie : $\sigma \Rightarrow^* u$. V odvodení postujeme nasledovne :
Ak $v_n = a$ použijeme pravidlo $\delta \rightarrow a\alpha a$, inak $\delta \rightarrow b\beta b$. Tým odvodíme vetnú formu u', pre ktorú bude platiť : $\varphi \in u'$ alebo $\psi \in u'$, $u' = xzy$, $h_1(xz)h_2(xz)y = v_1\ v_2 \ldots\ v_n$. Následne používame pravidlá

$$\alpha a \rightarrow a\alpha$$
$$\alpha b \rightarrow b\alpha$$
$$\beta a \rightarrow a\beta$$
$$\beta b \rightarrow b\beta$$
$$\alpha\psi \rightarrow \psi a$$
$$\beta\psi \rightarrow \psi b$$
$$\alpha\varphi \rightarrow \varphi a$$
$$\beta\varphi \rightarrow \varphi b$$

až pokým naša odvodená vetná forma nebude obsahovať žiadne neterminály α a β. Z predchádzajúcej inklúzie je zrejmé, že aj pre odvodenú vetnú formu u" bude naďalej platiť : $\varphi \in u''$ alebo $\psi \in u''$, $u'' = xzy$, $h_1(xz)h_2(xz)y = v_1\ v_2 \ldots\ v_n$.
Nakoniec použijeme jedno z dvojice pravidiel

$$\varphi \rightarrow b$$
$$\psi \rightarrow a$$

Ak označíme odvodenú vetnú formu q, bude platiť $h_1(x'z').h_2(x'z').y' = vv^Rv$, ak $q = x'z'y'$ (Dôkaz je rovnaký ako v inklúzii $L(G) \subseteq L$). Ale q nebude obsahovať ani jeden neterminál, z čoho vyplíva, že $q= vv^Rv = w$. Čím sme však dokázali i druhú inklúziu a teda $L = L(G)$.