7. Sada, úloha č. 2

Branislav Belas, 2i1

10. apríla 2001

Zadanie: Dokážte, že ak je prienik jazykov $L(x,y)$ a L_{SYM} neprázdny, potom nie je bezkontextový, t.j.

$$L(x,y) \cap L_{SYM} \neq \emptyset \Rightarrow L(x,y) \cap L_{SYM} \notin \mathcal{L}_{CF}$$

Potrebné definície: Nech $x = (x_1, \ldots, x_n)$ je n-tica neprázdnych slov, pričom $x_i \in \{a,b\}^*$. Definujeme jazyk $L(x)$ nad abecedou $\{1, 2, \ldots, n, a, b, \mathbf{c}\}$ takto:

$$L(x) = \{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \mathbf{c} i_k i_{k-1} \ldots i_1 \mid \forall l : (1 \leq i_l \leq n)\}$$

Ďalej nech $y = (y_1, \ldots, y_n)$ a $y_i \in \{a,b\}^*$. Potom

$$L(y) = \{y_{j_1} y_{j_2} \ldots y_{j_k} \mathbf{c} j_k j_{k-1} \ldots j_1 \mid \forall m : (1 \leq j_m \leq n)\}$$

Zrkadlový obraz jazyka $L(y)$ vyzerá takto:

$$L^R(y) = \{j_1 j_2 \ldots j_k \mathbf{c} y^R_{j_k} y^R_{j_{k-1}} \ldots y^R_{j_1} \mid \forall m : (1 \leq j_m \leq n)\}$$

Potom definujeme jazyk

$$L(x,y) = L(x)\mathbf{c}L^R(y)$$

teda

$$L(x,y) = \{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \mathbf{c} i_k i_{k-1} \ldots i_1 \mathbf{c} j_1 \ldots j_k \mathbf{c} y^R_{j_k} y^R_{j_k-1} \ldots y^R_{j_1} \mid$$
$$k \geq 1, \forall l : (1 \leq i_l \leq n), \forall m : (1 \leq j_m \leq n)\}$$

a jazyk

$$L_{SYM} = \{u\mathbf{c}v\mathbf{c}v^R\mathbf{c}u^R \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{1, 2, \ldots, n\}^*\}$$

Teraz už vidíme, ako bude vyzerať prienik jazykov $L(x,y)$ a L_{SYM}

$$L(x,y) \cap L_{SYM} = \{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \mathbf{c} i_k i_{k-1} \ldots i_1 \mathbf{c} i_1 i_2 \ldots i_k \mathbf{c} y^R_{i_k} y^R_{i_{k-1}} \ldots y^R_{i_1} \mid$$
$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_k}\}$$

Jazyky $L(x)$ a $L(y)$ vznikli ako horné, resp. dolné poschodia nejakého Postovho korešpondenčného problému. Dané zoznamy x a y sú vlastne dominové kocky, ktoré máme k dispozícii.

Jazyk L_{SYM} definuje istú symetriu, ktorá nám zaručí, že slovo z jazyka $L(x,y) \cap L_{SYM}$ bude riešením Postovho korešpondenčného problému. Ak je prienik jazykov $L(x,y)$ a L_{SYM} neprázdny, potom má Postov korešpondenčný problém pre zoznamy x a y riešenie. Ak má PKP jedno riešenie, potom ich má nekonečne veľa. Opakovaním jedného riešenia totiž dostávame ďalšie. To využijeme neskôr pri Pumpovacej leme, keď budeme potrebovať dostatočne dlhé slovo w.

Riešenie: Na dôkaz toho, že prienik jazykov $L(x,y)$ a L_{SYM} nie je bezkontextový, pužijeme Pumpovaciu lemu pre bezkontextové jazyky. V ďalšom budeme predpokladať, že prienik $L(x,y) \cap L_{SYM}$ je neprázdny. Ak by bol prázdny, bol by aj bezkontextový a triviálne by platila Pumpovacia lema. Predpokladajme teda, že prienik $L(x,y) \cap L_{SYM}$ je bezkontextový a neprázdny. Potom podľa Pumpovacej lemy existujú čísla p, q také, že

$$(\forall w \in L(x,y) \cap L_{SYM}, |w| > p) \quad \exists u, x, v, y, z \in \Sigma^*$$

také, že

1. $w = uxvyz$
2. $xy \neq \varepsilon$
3. $|xvy| \leq q$
4. $\forall i \geq 0 \quad ux^ivy^iz \in L(x,y) \cap L_{SYM}$

Označme si jednotlivé úseky slova $w \in L(x,y) \cap L_{SYM}$ oddelené symbolom $\mathbf{c}$:

$$\overbrace{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}}^{\textit{prvý úsek}}\,\mathbf{c}\,\overbrace{i_k i_{k-1}\ldots i_1}^{\textit{druhý úsek}}\,\mathbf{c}\,\overbrace{i_1 i_2\ldots i_k}^{\textit{tretí úsek}}\,\mathbf{c}\,\overbrace{y^R_{i_k}y^R_{i_{k-1}}\ldots y^R_{i_1}}^{\textit{štvrtý úsek}}$$

Zvoľme si číslo k tak, aby slovo w bolo dlhšie ako p a každý zo štyroch úsekov bol dlhší ako q. Pre slovo xvy, ktoré pumpujeme, musí platiť $|xvy| \leq q$. Preto pre umiestnenie slova xvy môžu nastať len tieto prípady:

$$\underbrace{x_{i_1}x_{i_2}\ldots}_{(1)}\underbrace{x_{i_k}\mathbf{c}i_k}_{(2)}\underbrace{i_{k-1}\ldots}_{(3)}\underbrace{i_1\mathbf{c}i_1}_{(4)}\underbrace{i_2\ldots}_{(5)}\underbrace{i_k\mathbf{c}y^R_{i_k}}_{(6)}\underbrace{y^R_{i_{k-1}}\ldots y^R_{i_1}}_{(7)}$$

- (1) V tomto prípade sa celé xvy nachádza v prvom úseku. To znamená, že ak by sme začali pumpovať slovo w, rozširoval by sa len prvý úsek. To by ale porušilo symetriu tohto úseku s posledným úsekom slova, lebo platí $w = u\mathbf{c}v\mathbf{c}v^R\mathbf{c}u^R$. Vidíme tiež, že by sa narušilo previazanie prvkov $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ s nimi zodpovedajúcimi indexmi $i_1, \ldots, i_k$. Preto pre prípad (1) Pumpovacia lema zlyhá.

- (2) V tomto prípade sa nám pri pumpovaní slova rozširuje prvý aj druhý úsek. Avšak tretí a švrtý úsek zostávajú nezmenené. Tým sa však porušuje symetria $u\mathbf{c}v\mathbf{c}v^R\mathbf{c}u^R$.

- (3) Už na prvý pohľad vidíme, že sa nám pri pumpovaní slova rozširuje druhý úsek, t.j. indexy. Tým sa poruší symetria aj previazanosť prvkov s prislúchajúcimi prvkami.

- (4) Tu sa nám pri pumpovaní rozširujú úseky indexov, ale prislúchajúce prvky zostávajú nezmenené.

- (5) Tento prípad je identický s prípadom (3), čiže vedie k strate symetrie aj previazanosti.

- (6) Prípad je identický s prípadom (2), čiže opäť strata symetrie.

- (7) Nastane tu rovnaký problém ako v prípade (1), čo vedie k strate symetrie aj previazanosti.

Akokoľvek zvolíme xvy, pri pumpovaní slova w vzniká slovo, ktoré nepatrí do prieniku jazykov $L(x,y) \cap L_{SYM}$. Pumpovacia lema teda v našom prípade neplatí, z čoho vyplýva záver:

Ak je prienik jazykov $L(x,y)$ a L_{SYM} neprázdny, potom nie je bezkontextový.