Prezentácia z FOJA
7. sada, úloha č. 2

Branislav Belas

11. apríl 2001

Úloha : Dokážte, že ak je prienik jazykov $L(x, y)$ a L_{SYM} neprázdny, potom nie je bezkontextový, t.j.

$$L(x, y) \cap L_{SYM} \neq \emptyset \Rightarrow L(x, y) \cap L_{SYM} \notin \mathcal{L}_{CF}$$

- Definície jazykov, ktoré použijeme

- Dôkaz pomocou Pumpovacej lemy

- Záver

Definície:

Nech $x = (x_1, \ldots, x_n)$ je n-tica neprázdnych slov, pričom $x_i \in \{a, b\}^*$. Definujeme jazyk $L(x)$ nad abecedou $\{1, 2, \ldots, n, a, b, \mathbf{c}\}$ takto

$$\boxed{L(x) = \{x_{i_1} \ldots x_{i_k} \mathbf{c} i_k \ldots i_1 \mid \forall l : (1 \leq i_l \leq n)\}}$$

Podobne nech $y = (y_1, \ldots, y_n)$ a $y_i \in \{a, b\}^*$. Potom

$$\boxed{L(y) = \{y_{j_1} \ldots y_{j_k} \mathbf{c} j_k \ldots j_1 \mid \forall m : (1 \leq j_m \leq n)\}}$$

- Jazyky $L(x)$ a $L(y)$ vznikli ako horné, resp. dolné poschodia pre prípad nejakého PKP. Dané zoznamy x a y sú vlastne dominové kocky, ktoré máme k dispozícii.

Definície: Jazyk $L(x, y)$ definujeme takto

$$\boxed{L(x, y) = L(x)\mathbf{c}L^R(y)}$$

teda

$$L(x, y) = \{x_{i_1} \ldots x_{i_k}\mathbf{c}i_k \ldots i_1\mathbf{c}j_1 \ldots j_k\mathbf{c}y^R_{j_k} \ldots y^R_{j_1} \mid$$

$$k \geq 1, \forall l : (1 \leq i_l \leq n), \forall m : (1 \leq j_m \leq n)\}$$

a jazyk

$$\boxed{L_{SYM} = \{u\mathbf{c}v\mathbf{c}v^R\mathbf{c}u^R \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{1, 2, \ldots, n\}^*\}}$$

Prienik jazykov $L(x,y)$ a L_{SYM}

$$L(x,y) \cap L_{SYM} =$$

$$\{x_{i_1} \dots x_{i_k} \mathbf{c} i_k \dots i_1 \mathbf{c} i_1 \dots i_k \mathbf{c} y_{i_k}^R \dots y_{i_1}^R \mid$$

$$x_{i_1} \dots x_{i_k} = y_{i_1} \dots y_{i_k}\}$$

- Nech $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $y = (y_1, \dots, y_n)$. Tento prípad PKP má riešenie, ak existuje postupnosť prirodzených čísel $i_1, \dots, i_k$, taká, že

$$x_{i_1} \dots x_{i_k} = y_{i_1} \dots y_{i_k}$$

- Symetria, ktorú definuje jazyk L_{SYM}, zaručí spolu s jazykom $L(x,y)$, že slovo z jazyka $L(x,y) \cap L_{SYM}$ bude riešením PKP.

- Ak je prienik jazykov $L(x,y)$ a L_{SYM} neprázdny, potom má PKP pre zoznamy x a y riešenie.

- Ak má PKP jedno riešenie, potom ich má nekonečne veľa. (Opakovaním jedného riešenia totiž dostávame ďalšie)

- Vvyužitie neskôr pri Pumpovacej leme, keď bude treba dostatočne dlhé slovo w.

Dôkaz:

- Pumpovacia lema

- Predpokladáme, že prienik $L(x,y) \cap L_{SYM}$ je neprázdny. (Ak by bol prázdny, bol by aj bezkontextový a platila by Pumpovacia lema)

Predpokladajme teda, že prienik $L(x,y) \cap L_{SYM}$ je bezkontextový a neprázdny.

Podľa Pumpovacej lemy existujú čísla p, q také, že

$(\forall w \in L(x,y) \cap L_{SYM}, |w| > p) \quad \exists u, x, v, y, z \in \Sigma^*$

také, že

1. $w = uxvyz$
2. $xy \neq \varepsilon$
3. $|xvy| \leq q$
4. $\forall i \geq 0 \quad ux^ivy^iz \in L(x,y) \cap L_{SYM}$

Označenie úsekov slova $w \in L(x,y) \cap L_{SYM}$:

$$\overbrace{x_{i_1} \dots x_{i_k}}^{\textit{prvý úsek}} \; \mathbf{c} \; \overbrace{i_k \dots i_1}^{\textit{druhý úsek}} \; \mathbf{c} \; \overbrace{i_1 \dots i_k}^{\textit{tretí úsek}} \; \mathbf{c} \; \overbrace{y_{i_k}^R \dots y_{i_1}^R}^{\textit{štvrtý úsek}}$$

Symetrie:

- prvý úsek – štvrtý úsek

$$(x_{i_1} \dots x_{i_k} = y_{i_1} \dots y_{i_k})$$

- druhý úsek – tretí úsek

- Zvoľme číslo k tak, aby $|w| > p$ a každý zo štyroch úsekov bol dlhší ako q. (Inými slovami: aby slovo xvy pokrývalo najviac jeden symbol **c**)

- Pre slovo xvy, ktoré pumpujeme, musí platiť $|xvy| \leq q$.

Pre umiestnenie slova xvy môžu nastať len tieto prípady:

$$\underbrace{x_{i_1}x_{i_2}\ldots}_{(1)}\underbrace{x_{i_k}\mathbf{c}i_k}_{(2)}\underbrace{i_{k-1}\ldots}_{(3)}\underbrace{i_1\mathbf{c}i_1}_{(4)}\underbrace{i_2\ldots}_{(5)}\underbrace{i_k\mathbf{c}y^R_{i_k}}_{(6)}\underbrace{y^R_{i_{k-1}}\ldots y^R_{i_1}}_{(7)}$$

$$\underbrace{x_{i_1}x_{i_2}\ldots}_{(1)}\underbrace{x_{i_k}\mathbf{c}i_k}_{(2)}\underbrace{i_{k-1}\ldots}_{(3)}\underbrace{i_1\mathbf{c}i_1}_{(4)}\underbrace{i_2\ldots}_{(5)}\underbrace{i_k\mathbf{c}y^R_{i_k}}_{(6)}\underbrace{y^R_{i_{k-1}}\ldots y^R_{i_1}}_{(7)}$$

- (1) Celé xvy sa nachádza v prvom úseku. Pri pumpovaní by sa rozširoval len prvý úsek. Porušila by sa symetria tohto úseku s posledným úsekom slova. Taktiež by sa narušilo previazanie prvkov $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$ s nimi zodpovedajúcimi indexmi $i_1,\ldots,i_k$.

- (2) Pri pumpovaní slova sa rozširuje prvý aj druhý úsek. Avšak tretí a švrtý úsek zostávajú nezmenené. Tým sa však porušuje symetria $u\mathbf{c}v\mathbf{c}v^R\mathbf{c}u^R$.

- (3) Už na prvý pohľad vidíme, že sa nám pri pumpovaní slova rozširuje druhý úsek, t.j. indexy. Tým sa poruší symetria aj previazanosť prvkov s prislúchajúcimi prvkami.

$$\underbrace{x_{i_1}x_{i_2}\ldots}_{(1)}\underbrace{x_{i_k}\mathbf{c}i_k}_{(2)}\underbrace{i_{k-1}\ldots}_{(3)}\underbrace{i_1\mathbf{c}i_1}_{(4)}\underbrace{i_2\ldots}_{(5)}\underbrace{i_k\mathbf{c}y^R_{i_k}}_{(6)}\underbrace{y^R_{i_{k-1}}\ldots y^R_{i_1}}_{(7)}$$

- (4) Tu sa nám pri pumpovaní rozširujú úseky indexov, ale prislúchajúce prvky zostávajú nezmenené.

- (5) Tento prípad je identický s prípadom (3), čiže vedie k strate symetrie aj previazanosti.

- (6) Prípad je identický s prípadom (2), čiže opäť strata symetrie.

- (7) Nastane tu rovnaký problém ako v prípade (1), čo vedie k strate symetrie aj previazanosti.

Akokoľvek zvolíme xvy, pri pumpovaní slova w vzniká slovo, ktoré nepatrí do prieniku jazykov $L(x,y) \cap L_{SYM}$. Pumpovacia lema teda v našom prípade neplatí, z čoho vyplýva záver.

Záver

Ak je prienik jazykov $L(x,y)$ a L_{SYM} neprázdny, potom nie je bezkontextový.

Tvrdenie: $L(x, y) \cap L_{SYM}$ je bezkontextový jazyk vtedy a len vtedy, keď je prázdny.

- Nech $u\mathbf{c}v\mathbf{c}v^R\mathbf{c}u^R$ je najkratšie slovo z $L(x, y) \cap L_{SYM}$
- Zoberme prienik jazyka $L(x, y) \cap L_{SYM}$ s regulárnou množinou $u^*\mathbf{c}v^*\mathbf{c}(v^R)^*\mathbf{c}(u^R)^*$
- Prienik je $\{u^n\mathbf{c}v^n\mathbf{c}(v^R)^n\mathbf{c}(u^R)^n \mid n \geq 1\}$
- Existuje sekvenčný stroj, ktorý zobrazuje tento prienik na jazyk $\{0^n1^n0^n \mid n \geq 1\}$

- Ak by bol $L(x,y) \cap L_{SYM}$ bezkontextový jazyk, musel by aj $\{0^n1^n0^n \mid n \geq 1\}$ byť bezkontextový
($\mathcal{L}_{CF}$ je uzavretá na prienik s regulárnou množinou a na sekvenčné zobrazenia)

Avšak jazyk $\{0^n1^n0^n \mid n \geq 1\}$ nie je bezkontextový a preto dostávame:

Jazyk $L(x,y) \cap L_{SYM}$ nie je bezkontextový, okrem prípadu, keď je prázdny.