Filip Číž

2. sada domácich úloh, 2. úloha :

Pomocou LBA (lineárne ohraničených automatov) dokážte uzavretosť triedy kontextových jazykov na zreťazenie

Máme dané gramatiky G_1 a G_2. Vytvoríme si ku gramatikám LBA A_1 a A_2 také, že:
$L(G_1) = L(A_1)$ a $L(G_2) = L(A_2)$.
Postup: Nech $G_x = (N,T,P,\delta)$. Potom LBA $A_x = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q, F)$ bude pracovať tak, že bude simulovať odvodenie v gramatike G odzadu, pričom
$K = \{q,q_k\} \cup \{q_{[a1,...,an;b1,...,bm]}, q'_{[a1,...,an;b1,...,bm]} \mid (a_1 ... a_n \rightarrow b_1 \dots b_m) \in P\}$
$\Sigma = T$, $\Gamma = T \cup N$, $F = \{q_k\}$

Ďalej budem pracovať s LBA A_1 a A_2. Zostrojím automat A_3, ktorý bude akceptovať $L(A_1) \circ L(A_2)$. Automat A_3 bude pracovať v nasledovných etapách (na vstupe dostane slovo w, ktoré vznikne zreťazením slov u$\in A_1$ a v$\in A_2$)

1. vyrobí na páske dve stopy, na hornú časť skopíruje *, na spodnú časť skopíruje w
2. nedeterministicky vyberie miesto medzi u a v a nad posledný znak z u zapíše falošný ($\binom{\$}{a}$), a $\in \Sigma$
3. vráti sa na začiatok slova w
4. spustí výpočet automatu A_1 po ($\binom{\$}{a}$)
5. keď bude v akceptačnom stave, zruší falošný dolár a vytvorí falošný cent
6. spustí simuláciu A_2
7. akceptuje, ak sa dostane do akceptačného stavu

definujeme automat A_3 : $(K_3, \Sigma_3, \Gamma_3, \delta_3, q_{03}, F_3)$
$K_3 = \{q_{01}, q^{(1)}, q^{(2)}, q_{xA1}, q_{yA2}\} \cup K_1 \cup K_2$; $\Sigma_3 = \Sigma_1 = \Sigma_2$; $\Gamma_3 = \Sigma \cup \Gamma_1 \times \Gamma_2$; $F_3 = F_2$
kde q_{xA1} nahradí všetky stavy automatu A_1 a q_{yA2} všetky stavy automatu A_2

1. $\delta_3(q_{01},a) = \{(q_{01}, \binom{*}{a}),1\}$ pre $\forall a \in \Sigma$; $\delta_3(q_{01},\$) = \{(q^{(1)}, \$, -1)\}$

2. $\delta_3(q^{(1)},\$) = \{(q^{(1)}, \$, -1)\}$; $\delta_3(q^{(1)}, \binom{*}{a}) = \{(q^{(2)}, \binom{\$}{a},-1)\}$

3. $\delta_3(q^{(2)}, \binom{*}{a}) = \{(q^{(2)}, \binom{*}{a}, -1)\}$; $\delta_3(q^{(2)}, \text{cent}) = \{q_{0A1},\text{cent},1\}$

4. $\delta_3(q_{x1A1}, \binom{*}{a}) = \{(q_{x2A1}, \binom{*}{b},t)\} \Leftrightarrow \exists\, \delta_1(q_{x1},a) = \{q_{x2},b,t\}$, $t \in \{-1,0,1\}$, $a,b \in \Sigma$, $0 \leq x1,x2 \leq x$

5. $\delta_3(q_{x3A1}, \binom{\$}{a}) = \{(q_{y1A2}, \binom{cent}{a},1)\} \Leftrightarrow q_{x3A1} \in F_1$

6. $\delta_3(q_{y2A2}, \binom{*}{a}) = \{(q_{y3A2}, \binom{*}{b},t)\} \Leftrightarrow \exists\, \delta_2(q_{y2},a) = \{q_{y3},b,t\}$, $t \in \{-1,0,1\}$, $a,b \in \Sigma$, $0 \leq y1,y2 \leq y$

7. $\delta_3(q_{y4A2},\$) \Leftrightarrow$ ak $q_{y4A2} \in F_2$

1.) $L(A_1) \circ L(A_2) \subseteq L(A_3)$
Nech slovo $w = u \circ v$, $u \in L(A_1)$, $v \in L(A_2)$. Automat A_3 prepíše slovo w na spodnú časť dvojitej pásky, na vrchnú zapíše * (1). Nedeterministicky určí miesto medzi u a v, na posledný znak z u zapíše falošný dolár (2). Presunie sa na začiatok slova w (3) a spustí výpočet automatu A_1 (4). Keď výpočet narazí na falošný dolár ($\binom{\$}{a}$), je A_3 v akceptačnom stave automatu A_1, pretože slovo $u \in L(A_1)$ (5). Preto pokračuje výpočtom automatu A_2 (6), a keďže slovo $v \in L(A_2)$, je automat v akceptačnom stave $\Rightarrow$ automat A_3 akceptuje slovo w.

2.) $L(A_1) \circ L(A_2) \supseteq L(A_3)$

Nech slovo $w \in L(A_3)$. Existuje miesto, na ktorom pri automat vytvoril falošný cent ($\begin{matrix} cent \\ a \end{matrix}$). Keďže je vytvorený falošný cent, musí slovo v, ktoré za ním nasleduje patriť $L(A_2)$ (môže byť aj prázdne, vtedy má falošný cent tvar ($\begin{matrix} cent \\ \$ \end{matrix}$)). Aby sa automat A_3 dostal do akceptačného stavu, musel A_2 akceptovať slovo v. Slovo od začiatku w po falošný dolár u patrí A_1.