Uloha 1 (prez.)

Zostrojte det. turingov stroj(TM), ktory ak dostane na vstup kod lub. TM A pretransformuje ho na kod TM A' takeho, ze

1. A' nema definovany krok zo ziadneho akceptacneho stavu
2. L(A') = L(A)

Detailne zdovodnite spravnost svojej konstrukcie.

Riešenie:

A=(K,Σ,Γ,δ,q0,F)

Množina stavov : K= {q0,q1,q11,q111,q00,qv,qv1,qv2,qv#,qv1#,qv2#,qs,qT
pT,pTo,pT0,pT1,pT0^,pT1^,p0*,p1*,p1,p0,p*,p1o,p0o,
pinit,pZM,p#,qKON,pi,piT,qi,qii,qiii,qiiiD,qiiiB,qiii0,qiii1}

Množina symbolov: Σ={0,1}
Γ={B,D,Dk,F,Fk,o,*,^,#,#d,-,+,+d}
Akceptačný stav: F={qacc}

δ-funkciu zostrojíme nasledovne:

- Zo vstupnej pásky zostrojíme dvojstopovú pásku, pričom na hornú stopu budeme prekladať vstup tak, že z 10 → +0 ; 110 → ++1 ; 1110 → +++# (z technickeho douvodu jeden stlpec pásky bude v riadku, (horna,dolna časť))

  δ(q0,1) =(q1,(+,1),1)
  δ(q1,1) =(q11,(+,1),1) δ(q1,0)=(q0,(0,0),1)
  δ(q11,1) =(q111,(+,1),1) δ(q11,0)=(q0,(1,0),1)
  δ(q111,0)=(q0,(#,0),1)
  δ(q0,B) =(q00,B,-1)

- Časť pásky, začínajúc od δ-funkcie až do konca prepíšeme na trojstopovú. Tým, že kód popisujúci δ-funkciu bude medzi symbolmi (D,#,0) - (Dk,#,0) podobne kód popisujúci akceptačné stavy bude medzi (F,#,0) - (Fk,#,0) Na každý krížik medzi F-Fk dáme " ^ " čo v ďalšom bude slúžiť na testovanie.

  δ(q00,(#,0)) = (qv,(Fk,#,0),-1)

  δ(qv,(a,x)) = (qv,(-,a,x),-1) ∀x∈{0,1} a∈{0,1,+}
  δ(qv1,(a,x)) = (qv1,(-,a,x),-1) ∀x∈{0,1} a∈{0,1,+}
  δ(qv2,(a,x)) = (qv2,(-,a,x),-1) ∀x∈{0,1} a∈{0,1,+}

  δ(qv,(#,x)) = (qv#,(^,#,x),-1)

$\delta(qv\#,(+,x)) = (qv\#,(-,+,x),-1)$
$\delta(qv1\#,(+,x)) = (qv2\#,(-,+,x),-1)$
$\delta(qv1\#,(+,x)) = (qv2\#,(-,+,x),-1)$
$\delta(qv\#,(a,x)) = (qv,(-,a,x),-1) \quad \forall a \in \{0,1\}$
$\delta(qv1\#,(a,x)) = (qv1,(-,a,x),-1)$
$\delta(qv2\#,(a,x)) = (qv2,(-,a,x),-1)$

$\delta(qv\#,(\#,0)) = (qv1,(F,\#,0),-1)$ $\delta(qv1\#,(\#,0)) = (qs,(Dk,\#,0),-1)$
$\delta(qs,(+,x)) = (qs,(-,+d,x),-1)$ $\delta(qs,(a,x)) = (qv2,(-,a,x),-1)$
$\delta(qv2\#,(\#,0)) = (qT,(D,\#,0),0)$

Test:
Nasledujúca časť slúži na testovanie jednotlivých pravidiel.
Procedúra bude fugovať nasledovne:
Symbol „o“ bude značiť miesto pokial sme už δ-funkciu otestovali. Testované písmeno budeme porovnávať po každom ^ , ak sa zhodujú, tak posuniem ^ , ak nie, tak ^ prepíšem na *. Toto robím, až kým sa nedostanem na konec pásky (to značí Fk). Smerom späť hladám aspoň jednu ^ , ak nenajdem , znamená že testované pravidlo je prípustné a posuniem „o“ na další # (čo značí začiatok ďalšieho pravidla). Ak nájdem , ak som testoval 1, tak testujem ďalšie písmeno, ak som testoval 0, tak mažem pravidlo a testujem dalšie.

- označím na páske prvé pravidlo „o“
  $\delta(qT,(-,+,x)) = (qT,(-,+,x),1)$ $\delta(qT,(-,\#,x)) = (pT,(o,\#d,x),0)$

- 1) prečítam písmeno za „o“ , posuniem „o“ a začnem testovať pismeno:
  $\delta(pT,(o,a,x)) = (pTo,(-,a,x),1) \quad \forall a \in \{0,1,\#\}, x \in \{0,1\}$
  $\delta(pTo,(-,+,x)) = (pTo,(-,+,x),1) \quad x \in \{0,1\}$ + ignorujem
  $\delta(pTo,(-,b,x)) = (pTb,(o,b,x),1) \quad b \in \{0,1\}$
  $\delta(pTo,(-,+d,x)) = (pTb,(-,+d,x),1)$
  $\delta(pTo,(Dk,\#,x)) = (qKon,(Dk,\#,x),0)$

- 2) hladám ^ , testujem písmeno $b \in \{0,1\}$.
  $\delta(pTb,(z,y,x)) = (pTb,(z,y,x),1) \quad \forall x,y,z \quad z \neq \text{^} \; z \neq Fk$
  $\delta(pTb,(\text{^},y,x)) = (pTb\text{^},(-,y,x),1)$
  $\delta(pTb\text{^},(-,+,x)) = (pTb\text{^},(-,+,x),1)$ + ignorujem
  $\delta(pTb\text{^},(-,b,x)) = (pTb,(\text{^},b,x),1)$
  $\delta(pTb\text{^},(z,a,x)) = (pTb,(*,a,x),1) \quad a \neq b$

  $\delta(pTb\text{^},(Fk,\#,0)) = (pb*,(Fk,\#,0),-1)$
  $\delta(pTb,(Fk,\#,0)) = (pb*,(Fk,\#,0),-1)$

- 3) prešiel som na konec pásky a teraz budem hladať aspoň jednu ^.
  $\delta(pb^*,(z,y,x)) = (pb^*,(z,y,x),-1)$ $\forall x,y,z$ $z \neq \hat{}$ $z \neq F$
  $\delta(pb^*,(\hat{},b,x)) = (pb,(\hat{},b,x),0)$
  $\delta(pb^*,(F,\#,0)) = (p^*,(F,\#,0),0)$

- 4) našiel som aspoň jedno ^ , a testoval som b=1. testujem dalšie pismeno.
  $\delta(p1,(z,y,x)) = (p1,(z,y,x),-1)$ $\forall x,y,z$ $z \neq o$
  $\delta(p1,(o,y,x)) = (pT,(o,y,x),0)$

- 5) našiel som aspoň jedno ^ a testoval som b=0 , to znamená, že som našiel pravidlo s akceptačným stavom, vzmažem ho.
  $\delta(p0,(z,y,x)) = (p0,(z,y,x),-1)$ $\forall x,y,z$ $z \neq o$
  $\delta(p0,(o,0,x)) = (p0o,(-,0,x),-1)$
  $\delta(p0o,(-,a,x)) = (p0o,(-,a,x),-1)$ $a \neq \#$ $a \neq \#d$
  $\delta(p0o,(-,\#,x)) = (pZM,(-,-,x),1)$
  $\delta(p0o,(-,\#d,x)) = (pZM,(-,\#d,x),1)$

  $\delta(pZM,(z,y,x)) = (pZM,(-,-,x),1)$ $y \neq \#$ $y \neq +d$
  $\delta(pZM,(z,\#,x)) = (pInit,(o,\#,x),1)$
  $\delta(pZM,(z,+d,x)) = (qKon,(z,+d,x),0)$

- 6) nenašiel som ^ , skočím na dalsie pravidlo
  $\delta(p^*,(z,y,x)) = (p^*,(z,y,x),-1)$ $z \neq o$
  $\delta(p^*,(o,y,x)) = (p\#,(-,y,x),1)$
  $\delta(p\#,(-,y,x)) = (p\#,(-,y,x),1)$ $y \neq \#$

  $\delta(p\#,(-,\#,x)) = (pInit,(o,\#,x),1)$
  $\delta(p\#,(Dk,\#,0)) = (qKon,(Dk,\#,0),0)$

- 7) Init – Nastavím ^ medzi F a Fk na # a inde dám -. Pustím další test.
  $\delta(pInit,(z,y,x)) = (pInit,(z,y,x),1)$ $z \neq F$
  $\delta(pInit,(F,y,x)) = (pi,(F,y,x),1)$

  $\delta(pi,(z,y,x)) = (pi,(-,y,x),1)$ $y \neq \#$ $z \neq Fk$
  $\delta(pi,(z,\#,x)) = (pi,(\hat{},\#,x),1)$ $z \neq Fk$
  $\delta(pi,(Fk,\#,0)) = (piT,(Fk,\#,0))$

  $\delta(piT,(z,y,x)) = (piT,(z,y,x),-1)$ $z \neq o$
  $\delta(piT,(o,y,x)) = (pT,(o,y,x))$

qKon – upravím pásku na výstup.

I. Vratim sa na (D,#,0) a začnem pásku zmenšovať na 2 stopy, až po Fk.

$\delta(qKon,(z,y,x)) = (qKon,(z,y,x),-1) \quad z \neq D$
$\delta(qKon,(D,y,x)) = (qi,(D,y,x),0)$
$\delta(qi,(z,y,x)) = (qi,(y,x),1)$
$\delta(qi,B) = (qii,B-1)$

II. idem dopredu a znižujem pásku, ak mám $(-,x) \rightarrow -$; $(a,x) \rightarrow x \quad a \neq -$
$\delta(qii,(y,x)) = (qii,x,-1) \quad y \neq -$
$\delta(qii,(-,x)) = (qii,-,-1)$
$\delta(qii,B) = (qiii,B,1)$

III. Čítam pásku a vynechám z nej - .
$\delta(qiii,x) = (qiii,x,1) \qquad x \neq - \quad x \neq B$
$\delta(qiii,-) = (qiiiD,D,1)$
$\delta(qiiiD,-) = (qiiiD,-,1) \qquad \delta(qiiiD,b) = (qiiib,-,-1) \quad b \in \{0,1\}$
$\delta(qiiib,-) = (qiiib,-,-1) \qquad \delta(qiiib,D) = (qiii,b,1)$

$\delta(qiii,B) = (qiiiB,B,-1) \qquad \delta(qiiiB,-) = (qiiiB,B,-1)$
$\delta(qiiiB,b) = (qAcc,b,0) \quad b \in \{0,1\}$

Zôvodnenie správnosti:

Lema:
Nech A je TS. Kód A vieme pretransformovať do kódu TS Á takého, že
1. Á nemá definovaný krok z akceptačného stavu,
2. L(Á)=L(A).

Dôkaz:
Nech $A=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q0,F)$, potom $Á:=(K,\Sigma,\Gamma,\delta1,q0,F)$ pričom pre $\delta1$ platí, že
$\delta1(q,a)=\{(p,b,k) \mid (p,b,k) \in \delta(q,a) \ \& \ q \notin F\}$
Teda platí podmienka 1.
$L(Á) \subseteq L(A)$:
Nech $w \in L(Á)$, tak zrejme $w \in L(A)$.
$L(A) \subseteq L(Á)$
Nech $w \in L(A)$, zoberme najkratší akceptačný výpočet slova w, potom ale tento výpočet skončí v prvom akceptačnom stavu. Teda existuje akceptačný výpočet aj v Á, teda $w \in L(Á)$.
Tým sme lemu dokázali.

Ztejto lemy vidíme, že náš TS A môže modifikovať len δ-funkciu, tj.vzmazať niektoré pravidlá. TS A zo vstupného kódu vymaže len tie časti, nad ktorymi sa vygenerovalo „-“ . „-“ na druhej stope sa môže zjaviť len vo vymazávacom stave

pZM, práve vtedy, ak pri testovani sme našli δ-funkciu, ktora ide z akceptačného stavu.

Dôkaz správnosti testovacej procedúry:

Tesovacia procedúra začína v stave „pT“, čítacia hlava je na „o“, pri predpokladoch:

- δ funkcia kódu je ohraničená D – Dk , medzi je „o“.
- Akceptačné stavy sú medzi F – Fk , medzi sú umiestnené „^“.

Procedúra otestuje jedno pravidlo, potom sa rozhodne, či ma testovať dalšie (ak ∃), alebo ukončiť pracu (ak overil ∀ pravidlá).
Nech máme zakódované δ(q,a)=(p,b,k). Dôkaz spravime matematickou indukciou vzhladom na počet 1 v kóde q (n), pre ľubovolný počet r∈F (m).

1° n=0, tj. δ je prázdne tak :

$$\begin{pmatrix} & o & - & - & - & Dk & \\ pT,.. & \S & \# & +d & +d & +d & \# & .. \\ & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \end{pmatrix} |-- \begin{pmatrix} & - & - & \\ pTo,.. & \# & \S & +d & .. \end{pmatrix} |--*$$

$$\begin{pmatrix} & Dk & \\ pTo,.. & \S & \# & .. \end{pmatrix} |-- \begin{pmatrix} & Dk & \\ qKon,.. & \S & \# & .. \end{pmatrix}$$

n=1 , q=10
a) m=0
Výpočet bude : prečítame 1 (z q), posunieme naň „o“,a pretože F={ }
∀^ prepíšeme na * , teda pravidlo je prípustné, „o“ posuniem na další # a testujem znova.
b) m>0 a q∈F
c) m>0 a q∉F

(pT,... ⌈(o,#,0)(-,+,1) (-,+,1) (-,1,0) (-,+,1) (-,0,0)...)|--(pTo,..(-,#,0) ⌈(-,+,1)..)|--
|--*(pT1,..(o,1,0) ⌈(-,+,1)..) - prečítali sme 1,

a) |--(pT1,.. ⌈(^,#,0)(-,+,1)(-,+,1) (-,+,1) (^,#,0)(-,+,1)(-,+,1)(-,+,1) (Fk,#,0))|--
|--*(pT^,.. (-,#,0)(-,+,1)(-,+,1) (-,+,1) (-,#,0)(-,+,1)(-,+,1)(-,+,1) ⌈(Fk,#,0))|--
|--*(p*,.. ⌈(F,#,0)..)|--(pInit,...)

b) funguje podobne len po ^ najde 1 ,prečíta 0, po ^ najde 0 a vymaže pravidlo pod „o“ (procedúre 5)
c) prečíta 0 z q ale za ^ 0 nenajde, končí podobne ako časť a).

2° Predpokladajme, že vieme otesovať $q=1^k0$ tj. $\exists$ výpočet.
Dokážeme, že vieme otestovať aj $q=1^{k+1}0$.
zoberme výpočet 1^k kódu, podla IP to $\exists$. Keďže po ukončení testu k-tej 1 sme v stavu pT. Mám dve možnosti:

- $q \in F$, testovanie k+1 „1“ bude ako vprípade 1°b).
- $q \notin F$, testovanie k+1 „1“ bude ako vprípade 1°c).

Teda test pravidla funguje správne, zvyšná časť δ-funkcie je elementárna, jej popis je uvedený vyššie.