Sada č.6, úloha č.4

Vypracoval: Ján Kmeť

Zadanie: Pre daný TM M nech $L_M = \{u\#v^R | u, v$ sú konfigurácie v M a zároveň $u \vdash v\}$. Dokážte, že L_M je bezkontextový.

Vypracovanie: Nech $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ je TM. Gramatiku pre L_M zostrojíme takto:

$$G = (N, T, P, \sigma)$$

$$N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma, N_{zac}, N_{kon}\} \cup \{N_{(q_1,q_2,x_1,x_2,a,d}\}$$
$$\forall q_1, q_2 \in K, x_1, x_2, a \in \Gamma\backslash\{B\}, d \in \{-1, 0, 1\}, \ldots$$

$$T = \Gamma \cup K \cup \{\#\}$$
$$P = \{\sigma \to N_{zac}|\alpha|N_{kon}$$
$$\alpha \to x\alpha x \quad \forall x \in \Gamma\backslash\{B\}$$
$$\alpha \to N_{(q_1,q_2,x_1,x_2,a,d)}$$
$$\forall q_1, q_2, x_1, x_2, d; (q_2, x_2, d) \in \delta(q_1, x_1), \quad \forall a \in \Gamma\backslash\{B\}$$
$$N_{(q_1,q_2,x_1,x_2,a,0)} \to aq_1x_1\beta x_2q_2a \quad //d = 0$$
$$N_{(q_1,q_2,x_1,x_2,a,1)} \to aq_1x_1\beta q_2x_2a \quad //d = 1$$
$$N_{(q_1,q_2,x_1,x_2,a,-1)} \to aq_1x_1\beta x_2aq_2 \quad //d = -1$$
$$\beta \to x\beta x|\# \quad \forall x \in \Gamma\backslash\{B\}$$

$$N_{zac} \to N_{z(q_1,q_2,x_2,d)}$$
$$\forall q_1, q_2, x_2, d; (q_2, x_2, d) \in \delta(q_1, B)$$
$$N_{z(q_1,q_2,x_2,0)} \to q_1B\gamma x_2q_2 \quad //d = 0$$
$$N_{z(q_1,q_2,x_2,1)} \to q_1B\gamma q_2x_2 \quad //d = 1$$
$$N_{z(q_1,q_2,x_2,-1)} \to q_1B\gamma x_2Bq_2 \quad //d = -1$$
$$\gamma \to x\gamma x|\# \quad \forall x \in \Gamma\backslash\{B\}$$

$$N_{kon} \to xN_{kon}x \quad \forall x \in \Gamma\backslash\{B\}$$
$$N_{kon} \to N_{k(q_1,q_2,x_2,a,d)}$$
$$\forall q_1, q_2, x_2, d; (q_2, x_2, d) \in \delta(q_1, B), \quad \forall a \in \Gamma\backslash\{B\}$$
$$N_{k(q_1,q_2,x_2,a,0)} \to aq_1B\#x_2q_2a \quad //d = 0$$
$$N_{k(q_1,q_2,x_2,a,1)} \to aq_1B\#Bq_2x_2a \quad //d = 1$$
$$N_{k(q_1,q_2,x_2,a,-1)} \to aq_1B\#x_2aq_2 \quad //d = -1\ \}$$

$\underline{L_M \subseteq L(G)}$

t.j. $\forall w \in L_M\ \exists$ odvodenie v G. Nech $w \in L_M$, $w = u\#v^R$ (pričom u, v sú po sebe idúce konfigurácie v M). Nech $u = a_1 \ldots a_n$. Nech $a_k \in K$ t.j. a_k určuje pozíciu hlavy. Nech $1 < k < n$ t.j. hlava nie je ani na začiatku, ani na konci. (špeciálne prípady sa dokážu podobne) Potom zrejme $|u| = |v|$. Ak označíme $v = b_1 \ldots b_n$, w bude tvaru $w = a_1 \ldots a_n\#b_n \ldots b_1$. Jeden krok výpočtu môže zmeniť maximálne 3 znaky u. t.j. znaky $a_{k-1}a_ka_{k+1}$, pre ostaté znaky teda bude platiť: $a_i = b_i$. Najskôr vygenerujeme úsek $a_1 \ldots a_{k-2}\alpha b_{k-2} \ldots a_1$. Použijeme pravidlá $\sigma \to \alpha$ a $k-2$. krát pravidlo $\alpha \to x\alpha x$. Teraz odsimulujeme jeden krok výpočtu M takto: Nech $a_{k-1}a_ka_{k+1} = aq_1x_1$. V M bolo použité pravidlo $\delta(q_1, x_1) = (q_2, x_2, d)$, potom v $G\ \exists$ pravidlo $\alpha \to N_{(q_1,q_2,x_1,x_2,a,d)}$, ktoré použijeme. T.j. dostávame $a_1 \ldots a_{k-2}N_{(q_1,q_2,x_1,x_2,a,d)}b_{k-2} \ldots b_1$.

a) Nech $d = 0$
výpočtu $(\ldots aq_1x_1\ldots) \vdash (\ldots aq_2x_2\ldots)$ odpovedá pravidlo $N_{(q_1,q_2,x_1,x_2,a,0)} \to aq_1x_1\beta x_2q_2a$.
b) Nech $d = 1$
výpočtu $(\ldots aq_1x_1\ldots) \vdash (\ldots ax_2q_2\ldots)$ odpovedá pravidlo $N_{(q_1,q_2,x_1,x_2,a,1)} \to aq_1x_1\beta q_2x_2a$.
b) Nech $d = -1$
výpočtu $(\ldots aq_1x_1\ldots) \vdash (\ldots q_2ax_2\ldots)$ odpovedá pravidlo $N_{(q_1,q_2,x_1,x_2,a,-1)} \to aq_1x_1\beta x_2aq_2$.
Použitím tochto pravidla dostávame vetnú formu $a_1\ldots a_{k+1}\beta b_{k+1}\ldots b_1$, pričom

$$(\ldots a_{k-1}a_ka_k\ +1\ldots) \vdash (\ldots (b_{k-1}b_kb_{k+1})^R\ldots)$$

odpovedá jednému kroku M. Teraz použijeme $n-k$. krát pravidlo $\beta \to x\beta x$ a ukončíme pravidlom $\beta \to \#$. A dostávame odvodenie $a_1\ldots a_n$ resp. $u\#v^R$ prislúchajúce konfiguráciam u, v v M takých, že $u \vdash v$, čo sme chceli dokázať.