Formalne jazyky a automaty
Prezentacia ulohy 6.3

Ján Michalička
FMFI, 4.skupina

1 Problem

Dokazte, ze bezkontextovy jazyk L je jednoznacny prave vtedy ak existuje jednoznacny zasobnikovy automat A taky, ze L = L(A).

2 Definicie

Definicia 1 *Bezkontextova gramatika je stvorica symbolov* $G = (N, T, P, \sigma)$, *kde* N *a* T *su abecedy neterminalnych a terminalnych symbolov* $(N \cap T = 0)$, $\sigma \in N$ *je pociatocny neterminal a* $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$ *je konecna mnozina pravidiel.*

Definicia 2 *Bezkontextova gramatika G je viacznacna, ak v L(G) existuje slovo aspon s dvoma roznymi stromami otvodenia. Inak je G jednoznacna.*

Definicia 3 *Bezkontextovy jazyk L je jednoznacny, ak existuje jednoznacna gramatika G taka, ze L=L(G).*

Definicia 4 *Nedeterministickym zasobnikovym automatom nazyvame 7-ticu* $(K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, *kde* K *je konecna mnozina stavov,* Σ *je abeceda vstupnych symbolov,* Γ *je abeceda zasobnikovych symbolov,* $Z_0 \in \Gamma$ *je symbol, ktory je v zasobniku na zaciatku vypoctu,* $F \subseteq K$ *je mnozina akceptacnych stavov a* $\delta : K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{K \times \Gamma^*}_{kon}$ *je prechodova funkcia.*

Definicia 5 *Zasobnikovy automat A je jednoznacny, ak pre kazde* $w \in L(A)$ *existuje prave jeden akceptacny vypocet v A.*

3 Riesenie

Potrebujeme dokazat:

Veta 1: Ak mame bezkontextovy jednoznacny jazyk L, tak existuje jednoznacny zasobnikovy automat taky, ze L=L(A)

Veta 2: Ak existuje jednoznacny zasobnikovy automat A taky, ze L=L(A), potom bezkontextovy jazyk L je jednoznacny.

Dokaz 1:

Nech mame bezkontextovy jednoznacny jazyk L, potom tento jazyk je generovany gramatikou G, ktora je taktiez jednoznacna.
To znamena ze v tejto gramatike sa nevyskytuju ziadne pravidla, pomocou ktorych by sme vedeli odvodzovat jednotlive slova z jazyka L viacerymi sposobmi.

Bezkontextovy jednoznacny jazyk L je generovany jednoznacnou gramatikou G, pre ktoru plati z definicie jednoznacnosti, ze v nej pre kazde slovo existuje iba jeden strom odvodenia.
Ak je bezkontextovy jazyk L jednoznacny, tak pre kazde slovo z jazyka L plati, ze existuje iba jedno lave krajne odvodenie. Vyplyva to z jednoznacnosti gramatiky G, ktora tento jazyk generuje.

Veta 3: K lubovolnej bezkontextovej gramatike G existuje zasobnikovy automat A, ktory akceptuje L(G) prazdnou pamatou.

Z gramatiky G, ktora generuje jednoznacny bezkontextovy jazyk L zostrojime standardnou konstrukciou na zaklade Vety 3 automat A. Automat A bude obsahovat iba jeden stav, mnozina

zasobnikovych symbolov bude obsahovat mnozinu neterminalov ako aj mnozinu terminalov v bezkontextovej gramatike.

Nech $A = (K = \{q_0\}, \Sigma = T, \Gamma = N \cup T, \delta, Z_0 = \sigma, F = \{\ \})$, kde
$\delta(q_0, \varepsilon, A = \{(q_0, \gamma^R) \mid (A \to \gamma) \in P\})$ pre $\forall A \in N$
$\delta(q_0, a, a) = \{(q_0, \varepsilon)\}$ pre $\forall a \in T$

Tento zasobnikovy automat bude vypoctom simulovat lave krajne odvodenie slova v jednoznacnej bezkontextovej gramatike G a kedze v bezkontextovej gramatike G existuje pre kazde slovo iba jedno odvodenie, takze v tomto zasobnikovom automate bude pre kazde slovo z jednoznacneho bezkontextoveho jazyka L existovat iba jeden akceptacny vypocet, cim bude zaroven splnat definiciu jednoznacneho zasobnikoveho automatu A.

Dokaz na pocet vyznacnych krokov. Vyznacne kroky su:
$\delta(q_0, \varepsilon, A = \{(q_0, \gamma^R) \mid (A \to \gamma) \in P\})$ pre $\forall A \in N$

Kazdy z tychto vyznacnych krokov predstavuje pouzitie jedneho z pravidiel pri prepisovani v gramatike G.

Pravidla typu $\delta(q_0, a, a) = \{(q_0, \varepsilon)\}$ pre $\forall a \in T$ nepredstavuju vyznacne kroky, pretoze je to iba odstranovanie nezaujimavych symbolov na prepis.

Tym sme dokazali platnost vety 1:
Ak mame bezkontextovy jednoznacny jazyk L, tak existuje jednoznacny zasobnikovy automat taky, ze L=L(A)

Priklad 1:

Nech jazyk L je generovany gramatikou G=(N,T,P,S)
N={S,A,B}, T={a,b}
P={(S -> A | B), (A -> aA | b), (B -> bB | a)}

Odvodime si napriklad slovo:

S -> A -> aA -> aaA -> aaaA -> aaab

Tento jazyk je jednoznacny.

Prevedieme gramatiku na automat A.

δ(q0, ε, S) -> {(q0, A), (q0, B)}
δ(q0, ε, A) -> {(q0, Aa)}
δ(q0, ε, B) -> {(q0, Bb)}
δ(q0, ε, A) -> {(q0, b)}
δ(q0, ε, B) -> {(q0, a)}
δ(q0, a, a) -> {(q0, ε)}
δ(q0, b, b) -> {(q0, ε)}

Odvodenie slova aaab v automate A.

(q0, aaab, S) |- (q0, aaab, A) |- (q0, aaab, Aa) |- (q0, aab, A) |-
(q0, aab, Aa) |- (q0, ab, A) |- (q0, ab, Aa) |- (q0, b, A) |- (q0, b, b)
|- (q0, ε, ε)

Odvodenie v automate A predstavuje lave krajne odvodenie v gramatike G a pre toto slovo existuje iba jeden akceptacny vypocet v A, ktory nam zabezpeci jednoznacnost automatu A.

Dokaz 2:

Mame jednoznacny zasobnikovy automat A, v ktorom podla definicie pre kazde slovo $w \in L(A)$ existuje prave jeden akceptacny vypocet.

Potrebujeme ukazat, ze jazyk L=L(A) generovany tymto automatom je jednoznacny, teda jazyk L je generovany gramatikou, v ktorej pre kazde slovo existuje prave jeden strom odvodenia.

Veta 4: K lubovolnemu zasobnikovemu automatu A existuje zasobnikovy automat akceptujuci prazdnou pamatou A‘ taky, ze N(A‘) = L(A).

Z vety 4 mozeme predpokladat, ze nas jednoznacny zasobnikovy automat A akceptuje prazdnou pamatou.

Pouzijeme standardnu konstrukciu na zostrojenie gramatiky G z jednoznacneho automatu A, tak, ze L(A)=L(G).

Nech A je jednoznacny zasobnikovy automat $(K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, 0)$. Nech G=(V,T,P,S) je bezkontextova gramatika, V je mnozina pozostavajuca zo symbolu S a vsetkych prvkov v tvare [q,A,p], kde q,p ∈ K a A ∈ Γ.

Zadefinujeme si pravidla:

1. S -> [q0,Z0,p] pre kazde q ∈ K
2. [q,A,p] -> a[q1,B1,q2]...[qm,Bm,pm+1] pre kazde qi ∈ K, kde p=qm+1, pre kazde a ∈ Σ ∪ {ε} a A, Bi ∈ Γ take, ze δ(q,a,A) obsahuje (q1, B1...Bm). Ak m=0, potom q1=p, δ(q,a,A) obsahuje (p,ε) a pravidlo ma tvar [q,A,p]->a

Definujme:
Konfiguracia O automatu A je pridruzena $q \in \{N, T\}^*$ z gramatiky, ak $q = ey$ resp. $q = ey$ kde $e \in T^*$ a $y \in \{N, T\}^*$
a automat A uz precital zo vstupu e
a dalej $(y)^R$ je obsahom zasobnika aut. A.

Lemma:
Nech O je konfiguracia automatu A a q je pridruzena v gramatike G taka, ze je jednoznacne odvoditelna. Nech O' je nasledujuca konfiguracia v A, t.j. O |- O'. A q' je pridruzena ku O'. Potom q => q' a q je jednoznacne odvoditelna.

Dokaz:

q => q' vyplyva zo standartnej konstrukcie:
Jednoznacnost:
Ak by nebola jednoznacna, tak ani konfiguracia O v A by nebola jednoznacna, a teda akceptacia w v automate A by nebola jednoznacna co je spor. (z dokazu standardnej konstrukcie)

Veta:
Ku kazdej konfiguracii v A vieme najst odvodenie q v G take ze q je jednoznacne pridruzene.

Matematicka indukcia:
Pre pociatocnu konfiguraciu O = (q0, w, Z)
podla definicie potom plati $q = ey = Z$, co je v poriadku, pretoze zo Z podla standardnej konstrukcie zaciname, a je to jednoznacne odvoditelne

Indukcny krok:
O = (p, ru, zt), kde w = aru
$q = a\,(zt)^R = a\,t(z)^R$

Dalsia konfiguracia nech je O' = (p, u, zb)

Zo standardnej konstrukcie k delta funkcii sa v gramatike nachaza take pravidlo, ze:

$(k, b) \in \delta(p,r,t)$ - pre niektore t
potom v gramatike existuje pravidlo
$t \rightarrow r\ (b[k,A,p])^R$

Pouzitim tohto pravidla na q mame
$ar(b[k,A,p])^R\ (z)^R = ar\ (z\ b[k,A,p])^R$ co je pridruzena ku O'

Dosledok:
Toto odvodenie plati aj pre akceptacnu konfiguraciu (zo standardnej konstrukcie vyplyva akceptacia prazdnym zasobnikom) , kedy q = w.