Prezentácia z Formálnych jazykov a automatov.

Sada 3, príklad 1

Zadanie:

Majme danú kontextovú gramatiku G. Zostrojte lineárne ohraničený automat (LBA) A, taký, že L(G) = L (A). Pri simulácii použite spätné odvodenie (teda postupne na páske robíte spätné kroky, až kým sa nedostanete ku σ).

Pri dôkaze použite matematickú indukciu.

Konštrukcia:

Nech G = (N, T, P, S).
Potom A = (K, Σ, δ, Γ, q_0, F), kde
$\Sigma = T$
$\Gamma = N \cup T \cup \{X, ¢, \$, \$_f\}$, predpokladáme, že $(N \cup T) \cap \{X, ¢, \$, \$_f\} = 0$
$F = \{ q_k \}$
$K = \{ q_0, q_k \} \cup \{ q_{[u,v]} \mid (u \rightarrow v) \in P \} \cup \{ q`_{[u,v]} \mid u, v \in (N \cup T)^* \}$
$\cup \{ p, p_x, p_\cdot, p_x` \} \cup \{ p_a, p_a` \mid a \in T \cup N \} \cup$
$\cup \{ r \}$

δ funkcia je definovaná nasledovne:

$\delta (q_0, ¢) = \{ (q_0, ¢, 1) \};$
$\delta (q_0, a) = \{ (q_{[u,v]}, a, 0) \}; a \in \Gamma - \{¢, \$, \$_f\}; q_{[u,v]} \in K;$
$\delta (q_{[u,v]}, a) = \{ (q_{[u,v]}, a, 1), (q`_{[u,v]}, a, 0 ) \}; a \in \Gamma - \{¢, \$, \$_f\}; q_{[u,v]}, q`_{[u,v]} \in K;$

$\delta (q`_{[bu,av]}, a) = \{ (q`_{[u,v]}, b, 1) \}; a, b \in \Gamma - \{¢, \$, \$_f\}; q`_{[bu,av]}, q`_{[u,v]} \in K;$
$\delta (q`_{[\varepsilon,av]}, a) = \{ (q`_{[\varepsilon,v]}, X, 1) \}; q`_{[\varepsilon,av]}, q`_{[\varepsilon,v]} \in K;$

$\delta (q`_{[\varepsilon,\varepsilon]}, a) = \{ (q`_{[\varepsilon,\varepsilon]}, a, -1) \}; a \in \Gamma - \{¢\};$
$\delta (q`_{[\varepsilon,\varepsilon]}, ¢) = \{ (p, ¢, 1) \};$

$\delta (p, a) = \{ (p, a, 1) \}; a \in \Gamma - \{X, ¢, \$, \$_f\};$
$\delta (p, X) = \{ (p_X, X, 0) \};$
$\delta (p, \$) = \{ (p`, \$, -1) \};$
$\delta (p, \$_f) = \{p`, \$_f, -1) \};$

$\delta (p_X, a) = \{ (p_a, X, 0) \}; a \in \Gamma - \{X, ¢, \$, \$_f\};$
$\delta (p_X, X) = \{ (p_X, X, 1) \};$
$\delta (p_X, \$) = \{ (p_X`, \$, 0) \};$
$\delta (p_X, \$_f) = \{ (p_X`, \$_f, 0) \};$

$\delta(p_a, a) = \{ (p_a`, a, 1) \}; a \in \Gamma - \{X, ¢, \$, \$_f\}; p_a \in K;$
$\delta(p_a, X) = \{ (p_a, X, -1) \}; p_a \in K;$

$\delta(p_a`, X) = \{ (p, a, 0) \}; a \in \Gamma - \{X, ¢, \$, \$_f\}; p_a` \in K;$

$\delta(p`, a) = \{ (p`, a, -1) \}; a \in \Gamma - \{X, ¢, \$, \$_f\}$
$\delta(p`, ¢) = \{ (r, ¢, 1) \};$

$\delta(p_X`, X) = \{ (p_X`, \$_f, -1) \};$
$\delta(p_X`, a) = \{ (p`, a, 0) \}; a \in \Gamma - \{X, ¢, \$, \$_f\};$
$\delta(p_X`, \$) = \{ (p_X`, \$, -1) \};$
$\delta(p_X`, \$_f) = \{ (p_X`, \$_f, -1) \};$

$\delta(r, \sigma) = \{ (r_\sigma, \sigma, 1) \};$
$\delta(r, a) = \{ (q_0, a, -1) \}; a \in \Gamma - \{\sigma, \$, \$_f\};$
$\delta(r, \$_f) = \{ (r, \$_f, 1) \};$
$\delta(r, \$) = \{ (q_k, \$, 0) \}.$

Dôkaz L(G) = L(A):

Najprv dokážeme pomocné tvrdenia:

Lema 1.1: $(¢q_{[u,v]}xvyt\$) \vdash^* (¢xq`_{[u,v]}vyt\$)$, kde $x,y \in (\Gamma-\{X, ¢, \$, \$_f\})^*$, $q_{[u,v]} \in K$, $t \in \$_f^*$.

Dôkaz: Postupujeme matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku x.

1. n = 0 ; potom $(¢q_{[u,v]}vyt\$) \vdash (¢q`_{[u,v]}vyt\$)$, tvrdenie platí.

IP: Tvrdenie platí pre n = k.

2. Dokážeme, že tvrdenie platí aj pre n = k+1.

n = k + 1; potom označme x = bx`, b ∈ Γ-{¢,$}, t.j. |x| = k,

$(¢q_{[u,v]}bx`vyt\$) \vdash (¢bq_{[u,v]}x`vyt\$) \vdash^*_{(IP)} (¢bx`q`_{[u,v]}vyt\$) = (¢xq`_{[u,v]}vyt\$)$,
tvrdenie platí.

q.e.d.

Lema 1.2: $(¢xq`_{[u,vz]}vzyt\$) \vdash^* (¢xuq`_{[\varepsilon,z]}zyt\$)$, kde $x,y \in (\Gamma-\{X, ¢, \$, \$_f\})^*$, $t \in \$_f^*$,
$q`_{[u,vz]} \in K$, $|u| = |v|$.

Dôkaz: Postupujeme matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku u.

1. n = 0, tvrdenie triviálne platí.

n = 1, potom označme u = b, vz = av`, a,b ∈ Γ-{X, ¢, $, $f}, |b| = |a|.

$(¢xq`_{[b,av`]}av`yt\$) \vdash (¢xbq`_{[\varepsilon,v`]}v`yt\$)$, tvrdenie platí.

IP: Tvrdenie platí pre n = k.

2. Dokážeme, že tvrdenie platí aj pre n = k+1.

n = k+1; potom označme v = av`, u = bu`, a,b ∈ Γ-{X, ¢, $, $f},

$u`, v` \in (\Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\})^*, |u`| = |v`| = k.$

$(¢xq`_{[bu`,av`z]}av`zyt\$) \vdash (¢xbq`_{[u`,v`z]}v`zyt\$) \vdash^*_{(IP)} (¢xbu`q`_{[ε,z]}zyt\$) =$
$= (¢xuq`_{[ε,z]}zyt\$)$, tvrdenie platí.

q.e.d.

Lema 1.3: $(¢xq`_{[ε,v]}vyt\$) \vdash^* (¢xzq`_{[ε,ε]}yt\$)$, kde $x,y \in (\Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\})^*, z \in X^*, t \in \$_f^*, |z| = |v||$.

Dôkaz: Postupujeme matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku v.

1. $n = 0, v = ε$, tvrdenie triviálne platí.
   $n = 1$, označme $v = a, a \in \Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\}$, potom
   $(¢xq`_{[ε,a]}ayt\$) \vdash (¢xXq`_{[ε,ε]}yt\$), z = X, |z| = 1$, tvrdenie platí.

IP: Tvrdenie platí pre $n = k$.

2. Dokážeme, že tvrdenie platí aj pre $n = k+1$.
   $n = k + 1$, označme $v = av`, a \in \Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\}, v` \in (\Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\})^k$,
   $(¢xq`_{[ε,av']}av'yt\$) \vdash (¢xXq`_{[ε,v']}v'yt\$) \vdash^*_{(IP)} (¢xXz_kq`_{[ε,ε]}yt\$)$.
   $|z_k| = k, |z| = |X| + |z_k| = k + 1$, tvrdenie platí.

q.e.d.

Lema 1.4: $(¢xq`_{[ε,ε]}yt\$) \vdash^* (¢pxyt\$)$, kde $x,y \in (\Gamma\text{-}\{¢, \$, \$_f\})^*, t \in \$_f^*$.

Dôkaz: Postupujeme matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku x.

1. $n = 0, (¢q`_{[ε,ε]}yt\$) \vdash (q`_{[ε,ε]}¢yt\$) \vdash (¢pyt\$)$, tvrdenie platí.
   $n = 1$, označme $x = a, a \in \Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\}$
   $(¢aq`_{[ε,ε]}yt\$) \vdash (¢q`_{[ε,ε]}ayt\$) \vdash (q`_{[ε,ε]}¢yt\$) \vdash (¢pyt\$)$, tvrdenie platí.

IP: Tvrdenie platí pre $n = k$.

2. Dokážeme, že tvrdenie platí aj pre $n = k+1$.
   $n = k + 1$, označme $x = x`a, a \in \Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\}, x` \in (\Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\})^k$.
   $(¢x`aq`_{[ε,ε]}yt\$) \vdash (¢x`q`_{[ε,ε]}ayt\$) \vdash^*_{(IP)} (¢pxyt\$)$, tvrdenie platí.

q.e.d.

<u>Lema 1:</u> $(¢q_{[u,v]}xvyt\$) \vdash^* (¢pxuzyt\$)$, kde $x,y \in (\Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\})^*, z \in X^*, t \in \$_f^*, |u| + |z| = |v|$.

Dôkaz: Priamy dôkaz pomocou Lemy1.1 – Lemy 1.4.

$(¢q_{[u,v]}xvyt\$) \vdash^*_{(Lema1.1)} (¢xq`_{[u,v]}vyt\$) \vdash^*_{(Lema1.2)} (¢xuq`_{[ε,v`]}v`yt\$) \vdash^*_{(Lema1.3)}$
$\vdash^*_{(Lema1.3)} (¢xuzq`_{[ε,ε]}yt\$) \vdash^*_{(Lema1.4)} (¢pxuzyt\$)$, podľa Lemy 1.3 $|z| = |v| - |u|$ a teda platí $|u| + |z| = |v|$.

q.e.d.

Lema 2.1: $(¢upvzyt\$) \vdash^* (¢uvp_Xzyt\$)$ kde u, v, y $\in (\Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\})^*$, z $\in X^*$, t $\in \$_f^*$.

Dôkaz: Postupujeme matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku v.

Označme z = Xz`.

1. n = 0, $(¢upXz`yt\$) \vdash (¢up_XXz`yt\$)$, tvrdenie platí.
   n = 1, označme v = a, a $\in$ $\Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\}$.
   $(¢upazyt\$) \vdash (¢uapXz`yt\$) \vdash (¢uap_XXz`yt\$)$, tvrdenie platí.

IP: Tvrdenie platí pre n = k.

2. Dokážeme, že tvrdenie platí aj pre n = k+1.
   n = k+1, označme v = av`, a $\in$ $\Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\}$, v` $\in$ $(\Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\})^*$.
   $(¢upav`zyt\$) \vdash (¢uapv`zyt\$) \vdash^*_{(IP)} (¢uav`p_Xzyt\$)$, tvrdenie platí.

q.e.d.

Lema 2.2: $(¢uvp_Xzyt\$) \vdash^* (¢uvzp_Xyt\$)$, kde u, v, y $\in (\Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\})^*$, z $\in X^*$, t $\in \$_f^*$.

Dôkaz: Postupujeme matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku z.

1. n = 0, tvrdenie triviálne platí.
   n = 1, z = X.
   $(¢uvp_XXt\$) \vdash (¢uvXp_Xyt\$)$, tvrdenie platí.

IP: Tvrdenie platí pre n = k.

2. Dokážeme, že tvrdenie platí aj pre n = k+1.
   n = k+1, označme z = Xz`, z` $\in X^*$, |z`| = k.
   $(¢uvp_XXz`yt\$) \vdash (¢uvXp_Xz`yt\$) \vdash^*_{(IP)} (¢uvXz`p_Xyt\$) = (¢uvzp_Xyt\$)$, tvrdenie platí.

q.e.d.

Lema 2.3: $(¢vazp_X`t\$) \vdash^* (¢vp`at`\$)$, kde v $\in (\Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\})^*$, a $\in \Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\}$, t, t` $\in \$_f^*$, |t |+|z| =|t`|.

Dôkaz: Postupujeme matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku z.

1. n = 0, $(¢vap_X`t\$) \vdash (¢vp_X`at\$) \vdash (¢vp`at\$)$, tvrdenie platí.
   n = 1, z = X.
   $(¢vaXp_X`t\$) \vdash (¢vap_X`\$_ft\$) \vdash (¢vp_X`a\$_ft\$) \vdash (¢vp`a\$_ft\$)$, tvrdenie platí.

IP: Tvrdenie platí pre n = k.

2. Dokážeme, že tvrdenie platí aj pre n = k+1.
   n = k+1, označme z = z`X, z` $\in X^*$, |z`| = k.
   $(¢vaz`Xp_X`t\$) \vdash (¢vaz`p_X`\$_ft\$) \vdash^*_{(IP)} (¢vp`at`\$)$, tvrdenie platí.

Lema 2.4: $(¢vaz_1p_az_2t\$) \vdash^* (¢vp_aaz_1z_2t\$)$, kde v $\in (\Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\})^*$, a $\in \Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\}$, t$\in \$_f^*$, $z_1, z_2 \in X^*$, $p_a \in K$.

Dôkaz: Postupujeme matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku z_1.

1. n = 0, $(¢vap_az_2t\$) \vdash (¢vp_aaz_2t\$)$, tvrdenie platí.
   n = 1, z_1 = X.

$(¢vaXp_az_2t\$) \vdash (¢vap_aXz_2t\$) \vdash (¢vp_aaXz_2t\$)$, tvrdenie platí.

IP: Tvrdenie platí pre n = k.

2. Dokážeme, že tvrdenie platí aj pre n = k+1.

n = k+1, označme $z_1 = z`X$, $z` \in X^*$, $|z`| = k$.

$(¢vaz`Xp_az_2t\$) \vdash (¢vaz`p_aXz_2t\$) \vdash^*_{(IP)} (¢vp_azXz_2t\$) = (¢vp_az_1z_2t\$)$, tvrdenie platí.

q.e.d.

Lema 2.5: $(¢vp`yt\$) \vdash^* (¢p`vyt\$)$, kde $v,y \in (\Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\})^*$, $t \in \$_f^*$.

Dôkaz: Postupujeme matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku v.

1. n = 0, tvrdenie triviálne platí.

n = 1, $v = a$, $a \in \Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\}$.

$(¢ap`yt\$) \vdash (¢p`ayt\$)$, tvrdenie platí.

IP: Tvrdenie platí pre n = k.

2. Dokážeme, že tvrdenie platí aj pre n = k+1.

n = k+1, označme $v = v`a$, $v` \in (\Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\})^*$, $a \in \Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\}$.

$(¢v`ap`yt\$) \vdash (¢v`p`ayt\$) \vdash^*_{(IP)} (¢p`v`ayt\$) = (¢p`vyt\$)$, tvrdenie platí.

<u>Lema 2:</u> $(¢upvzyt\$) \vdash^* (¢ruvyt`\$)$, kde $u, v, y \in (\Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\})^*$, $z \in X^*$, $t, t` \in \$_f^*$, $|t|+|z| = |t`|$.

Dôkaz: Postupujeme matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku y.

1. n = 0, označme $v = v`a$, $v` \in (\Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\})^*$, $a \in \Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\}$.

$(¢upvzt\$) \vdash^*_{(Lema2.1)} (¢uvp_Xzt\$) \vdash^*_{(Lema\ 2.2)} (¢uvzp_Xt\$) \vdash (¢uvzp_X`t\$) \vdash^*_{(Lema2.3)}$

$\vdash^*_{(Lema2.3)} (¢uv`p`at`\$) \vdash^*_{(Lema2.5)} (p`¢uvt`\$) \vdash (¢ruvt`\$)$, tvrdenie platí.

n = 1, označme $v = v`a$, $y = b$, $v` \in (\Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\})^*$, $a, b \in \Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\}$.

$(¢upvzbt\$) \vdash^*_{(Lema2.1)} (¢uvp_Xzbt\$) \vdash^*_{(Lema2.2)} (¢uvzp_Xbt\$) \vdash$

$\vdash (¢uvzp_bXt\$) \vdash^*_{(Lema2.4)} (¢uv`p_bazXt\$) \vdash (¢uvp_b`Xzt\$) \vdash (¢uvpbzt\$) \vdash$

$\vdash (¢uvbp_Xzt\$) \vdash^*_{(Lema2.2)} (¢uvbzp_Xt\$) \vdash (¢uvbzp_X`t\$) \vdash^*_{(Lema2.3)}$

$\vdash^*_{(Lema2.3)} (¢uvp`bt`\$) \vdash^*_{(Lema2.5)} (p`¢uvbt`\$) \vdash (¢ruvbt`\$)$, tvrdenie platí.

IP: Tvrdenie platí pre $|y| = k$.

2. Dokážeme, že tvrdenie platí aj pre $|y| = k+1$.

n = k+1, označme $v = v`a$, $y = by`$, $v`, y` \in (\Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\})^*$,
$a, b \in \Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\}$.

$(¢upvzyt\$) \vdash^*_{(Lema2.1)} (¢uvp_Xzyt\$) \vdash^*_{(Lema2.2)} (¢uvzp_Xby`t\$) \vdash$

$\vdash (¢uvzp_bXy`t\$) \vdash^*_{(Lema2.4)} (¢uv`p_bazXy`t\$) \vdash (¢uvp_b`Xzy`t\$) \vdash$

$\vdash (¢uvpbzy`t\$) \vdash^*_{(IP)} (¢ruvyt`\$)$, tvrdenie platí.

q.e.d.

<u>Lema 3:</u> $(¢rxt\$) \vdash^* (¢q_0xt\$)$; $x \in (\Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\})^*$, $t \in \$_f^*$, $x \neq \sigma$.

Dôkaz: Priamy dôkaz:

Označme $x = ax`$, $a \in \Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\}$, $x \in (\Gamma\text{-}\{X, ¢, \$, \$_f\})^*$.

1. $a = \sigma$

   $(¢r\sigma x`t\$) \vdash (¢\sigma rxt\$) \vdash (¢q_0\sigma x`t\$) = (¢q_0xt\$)$

2. $a \neq \sigma$

   $(¢rax`t\$) \vdash (¢q_0ax`t\$) = (¢q_0xt\$)$

Lema 4.1: $(¢\sigma rt\$) \vdash^* (¢\sigma tr\$)$, $t \in \$_f^*$.

Dôkaz: Postupujeme matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku x.

1. n = 0, tvrdenie triviálne platí.

   $n = 1,\ t = \$_f$,

   $(¢\sigma r\$_f\$) \vdash^* (¢\sigma\$_f r\$)$, tvrdenie platí.

IP: Tvrdenie platí pre n = k.

2. Dokážeme, že tvrdenie platí aj pre n = k+1.

   $n = k+1,\ t = \$_f t`,\ t` \in \$_f^{t-1}$,

   $(¢\sigma r\$_f t`\$) \vdash^* (¢\sigma\$_f rt`\$) \vdash^* (¢\sigma\$_f t`r\$)$, tvrdenie platí.

q.e.d.

<u>Lema 4:</u> $(¢r\sigma t\$) \vdash^* (¢\sigma tq_k\$)$

Dôkaz: Priamy dôkaz:

$(¢r\sigma t\$) \vdash (¢\sigma rt\$) \vdash {}^*_{(Lema\ 4.1)}\ (¢\sigma tr\$) \vdash (¢\sigma tq_k\$)$

Prejdeme k samotnému dôkazu:

Dokážeme 2 inklúzie:

1.L(G) ⊆ L(A):

Nech $w \in L(G)$, potom existuje odvodenie w v G:
$\sigma \Rightarrow v_1 \Rightarrow v_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow v_{n-1} \Rightarrow v_n = w$.
Dokážeme, že existuje akceptujúci výpočet slova w v automate A
Postupujeme indukciou vzhľadom na počet krokov odvodenia slova w v gramatike G.

1. V prvom kroku ukážeme, že platí: $(¢q_0w\$) \vdash^* (¢q_0v_{n-1}t_{n-1}\$)$, kde
   $v_{n-1} \Rightarrow_G w$; $t_{n-1} \in \$_f^*$, $|t_{n-1}| = |w| - |v_{n-1}|$.
   Označme $w = xvy$, $v_{n-1} = xuy$, potom $u \rightarrow v \in P$ a teda podľa definície A $q_{[u,v]} \in K$.
   Konštruujeme výpočet:
   $(¢q_0xvy\$) \vdash (¢q_{[u,v]}xvy\$) \vdash {}^*_{(Lema1)}\ (¢pxuzy\$) \vdash {}^*_{(Lema2)}\ (¢rxuyt_{n-1}\$) \vdash {}^*_{(Lema3)}\ (¢q_0xuyt_{n-1}\$)$

2. Ďalej dokážeme, že pre vetnú formu v_k odvodenú na n = k krokov platí :
   $(¢q_0v_kt_k\$) \vdash^* (¢q_0v_{k-1}t_{k-1}\$)$, kde v_{k-1} je vetná forma odvodená na k-1 krokov a
   $v_{k-1} \Rightarrow_G v_k$; $t_k, t_{k-1} \in \$_f^*$, $|t_{k-1}| - |t_k| = |v_k| - |v_{k-1}|$.
   Označme $v_k = xvy$, $v_{k-1} = xuy$, potom $u \rightarrow v \in P$ a teda podľa definície A $q_{[u,v]} \in K$.

Konštruujeme výpočet:

$(¢q_0xvyt_k\$) \vdash (¢q_{[u,v]}xvyt_k\$) \vdash^*_{(Lema1)} (¢pxuzyt_k\$) \vdash^*_{(Lema2)} (¢rxuyt_{k-1}\$) \vdash^*_{(Lema3)}$
$\vdash^*_{(Lema3)} (¢q_0xuyt_{k-1}\$)$

3. Nakoniec ukážeme, že výpočet automatu A sa zastaví v akceptačnom stave a platí:

$(¢q_0v_1t_1\$) \vdash^* (¢\sigma t_0q_k\$)$, $\sigma \Rightarrow v_1$.
Označme $v_1 = v$, potom $\sigma \rightarrow v \in P$ a teda podľa definície A $q_{[\sigma,v]} \in K$.
Konštruujeme výpočet:

$(¢q_0vt_1\$) \vdash (¢q_{[\sigma,v]}vt_1\$) \vdash^*_{(Lema1)} (¢p\sigma zt_1\$) \vdash^*_{(Lema2)} (¢r\sigma t_0\$) \vdash^*_{(Lema4)} (¢\sigma t_0q_k\$)$.

L(A) ⊆ L(G):

Nech $w \in L(A)$, potom vzhľadom na konštrukciu automatu A existuje akceptačný výpočet w v A: $(¢q_0w\$) \vdash^*(¢q_0v_{n-1}t_{n-1}\$) \vdash \ldots. \vdash (¢q_0v_1t_1\$) \vdash^*(¢\sigma t_0q_k\$)$, $t_i \in \$_f$, $|t_i| = |w| - |v_i|$.
Dokážeme, že existuje odvodenie slova w v gramatike G.
Postupujeme indukciou vzhľadom na počet prechodov stavom q_0 vo výpočte slova w v automate A.

1. Ukážeme, že ku každému výpočtu, ktorý sa skončí, vieme nájsť odvodenie $v_{n-1} \Rightarrow w$.
   Počiatočná konfigurácia (teda konfigurácia po 0 prechodoch automatu A stavom q_0:
   $(¢q_0w\$)$
   Rozoberieme všetky možnosti, pričom si všímame hlavne tie kroky výpočtu, v ktorých sa automat A nedeterministicky rozhoduje.

   1. A sa v prvom kroku výpočtu rozhodne pre správny stav $q_{[u,v]}$, teda taký, že v je podslovom w.

      $(¢q_0w\$) \vdash (¢q_{[u,v]}w\$)$

      a) A si zvolí správne pozíciu v ktorej zmení stav $q_{[u,v]}$ na $q`_{[u,v]}$, teda

         $(¢q_{[u,v]}xvy\$) \vdash^*(¢xq_{[u,v]}vy\$)$, kde w = xvy.
         Výpočet pokračuje jediným spôsobom (je ďalej deterministický).

         $(¢xq_{[u,v]}vy\$) \vdash^* (¢pxuzy\$) \vdash^* (¢rxuyt\$) \vdash^* (¢xq_0xuyt\$)$
         $q_{[u,v]} \in K$, t.j. $u \rightarrow v \in P$ a teda $v_{n-1} = xuy \Rightarrow_G xvy = w$.

      b) A si zvolí nesprávne pozíciu v ktorej zmení stav $q_{[u,v]}$ na $q`_{[u,v]}$, teda

         $(¢q_{[u,v]}xy\$) \vdash^*(¢xq_{[u,v]}y\$)$, kde w = xy a neexistuje y` také, že y = vy`.
         Výpočet sa zastaví.

   2. A sa v prvom kroku výpočtu rozhodne pre nesprávny stav $q_{[u,v]}$, teda taký, že v nie je poslovom w.
      Označme w =xy.

      $(¢q_0xy\$) \vdash (¢q_{[u,v]}xy\$) \vdash^* (¢xq_{[u,v]}y\$)$ Výpočet sa zastaví.
      Zdôvodnenie: $\forall x,y$, w = xy, podľa predpokladu $v \not\in w$ a teda neexistuje také y`, že
      y =vy`.

2. IP: Existuje odvodenie $v_k \Rightarrow v_{k+1} \Rightarrow ... \Rightarrow v_{n-1} \Rightarrow w$. Ukážeme, že existuje aj odvodenie $v_{k-1} \Rightarrow v_k \Rightarrow ... \Rightarrow v_{n-1} \Rightarrow w$.
   Po n-k prechodoch stavom q_0 sa automat A nachádza v konfigurácii:
   $(¢xq_0v_kt_k\$)$, $t_k \in \$_f^*$, $|t_k| = |w| - |v_k|$
   Podobne ako v prvom kroku indukcie rozoberieme všetky možnosti, pričom si všímame hlavne tie kroky výpočtu, v ktorých sa automat A nedeterministicky rozhoduje.

   1. A sa v prvom kroku výpočtu rozhodne pre správny stav $q_{[u,v]}$, teda taký, že $v \in v_k$.

      $(¢q_0v_kt_k\$) \vdash (¢q_{[u,v]}v_kt_k\$)$

      a) A si zvolí správne pozíciu v ktorej zmení stav $q_{[u,v]}$ na $q`_{[u,v]}$, teda

         $(¢q_{[u,v]}xvyt_k\$) \vdash^* (¢xq_{[u,v]}vyt_k\$)$, kde $v_k = xvy$.
         Výpočet pokračuje jediným spôsobom (je ďalej deterministický).

         $(¢xq_{[u,v]}vyt_k\$) \vdash^* (¢pxuzyt_k\$) \vdash^* (¢rxuyt_{k-1}\$) \vdash^* (¢xq_0xuyt_{k-1}\$)$
         $q_{[u,v]} \in K$, t.j. $u \rightarrow v \in P$, teda $v_{k-1} = xuy \Rightarrow_G xvy = v_k \Rightarrow v_{k+1} \Rightarrow ... \Rightarrow v_{n-1} \Rightarrow w$ (IP).

      b) A si zvolí nesprávne pozíciu v ktorej zmení stav $q_{[u,v]}$ na $q`_{[u,v]}$, teda

         $(¢q_{[u,v]}xyt_k\$) \vdash^* (¢xq_{[u,v]}yt_k\$)$, kde $v_k = xy$ a neexistuje $y`$ také, že $y = vy`$.
         Výpočet sa zastaví.

   2. A sa v prvom koku výpočtu rozhodne pre nesprávny stav $q_{[u,v]}$, teda taký, že $v \notin v_k$.
      Označme $v_k = xy$.

      $(¢q_0xyt_k\$) \vdash (¢q_{[u,v]}xyt_k\$) \vdash^* (¢xq_{[u,v]}yt_k\$)$ Výpočet sa zastaví.
      Zdôvodnenie: $\forall x,y$, $v_k = xy$, podľa predpokladu $v \notin w$ a teda neexistuje také $y`$, že
      $y = vy`$.

   3. Keďže $w \in L(A)$, automat A skončí výpočet v q_k a teda podľa druhého kroku posledný zo stavov $q_{[u,v]} \in K$, ktorým automat prejde počas výpočtu bude taký, kde $u = \sigma$ a $v = v_1$ a teda $\sigma \rightarrow v_1 \in P$, potom $\sigma \Rightarrow v_1 \Rightarrow ... \Rightarrow v_{n-1} \Rightarrow w$ je odvodenie v G a teda $w \in L(G)$.

q.e.d.