Prezentácia z formálnych jazykov a automatov

7. sada, úloha 4

Jana Lachová

Zadanie: Uvažujme jazyk $L_U = \{< M, w > | w \in L(M)\}$ (teda jazyk univerzálneho Turingovho stroja).

Dokážte, že:

a) L_U je rekurzívne vyčíslitelný, ale nie je rekurzívny.

b) Komplement jazyka L_U nie je rekurzívne vyčíslitelný.

Riešenie:

a) Trieda jazykov akceptovaných Turingovými strojmi je trieda rekurzívne vyčíslitelných jazykov (L_{RE}). Keďže pre L_U existuje Turingov stroj, ktorý akceptuje práve slová jazyka L_U (univerzálny Turingov stroj), tak zrejme L_U je rekurzívne vyčísliteľný.

$$L_U \in L_{RE} \tag{1}$$

Vieme, že platí ${L_D}^C \notin L_{RE}$, kde L_D je diagonálny jazyk.
($L_D = \{w \in \{0,1\}^* | w \in L(A_w)\}$, kde A_w je Turingov stroj s kódom w)

Dokážeme sporom, že L_U nie je rekurzívny. Nech L_U je rekurzívny, teda existuje deterministický Turingov stroj M_U, ktorý zastaví na každom vstupe taký, že $L_U = L(M_U)$. Potom, ale vieme skonštruovať Turingov stroj B, taký, že $L(B) = {L_D}^C$.

Turingov stroj B skonštuujeme nasledovne:

1. Nech w je vstupné slovo, B vyrobí na páske $w\#w$.
2. Potom bude B simulovať M_U, ktorý zastaví na každom vstupe.
3. Ak M_U akceptuje, tak B neakceptuje, a naopak, ak M_U neakceptuje, (ale zastaví) tak B akceptuje. (Toto môžeme zabezpečiť tak, že pre každý stav automatu M_U, ktorý nie je akceptačný bude pre každý symbol pre ktorý nebol definovaný krok v automate M_U definovaný krok do jediného akceptačného stavu automatu B.)

Zrejme $L(B) = {L_D}^C$, teda ${L_D}^C \in L_{RE}$. Lenže vieme, že platí: ${L_D}^C \notin L_{RE}$. Preto $L(M_U) \notin L_{REC}$ (L_{REC} je trieda rekurzívnych jazykov), teda, keďže $L(M_U) = L_U$, tak L_U nie je rekurzívny.

$$L_U \notin L_{REC} \tag{2}$$

b) Máme vetu: Ak $L \in L_{RE}$ a $L^C \in L_{RE}$,potom $L \in L_{REC}$.

Dokážeme sporom, že ${L_U}^C$ nie je rekurzívne vyčíslitelný (teda ${L_U}^C \notin L_{RE}$). Vieme podľa (1), že $L_U \in L_{RE}$. Nech ${L_U}^C \in L_{RE}$. Potom ale podľa uvedenej vety platí, že $L_U \in L_{REC}$. Ale to je spor s (2). Preto platí ${L_U}^C \notin L_{RE}$, teda ${L_U}^C$ nie je rekurzívne vyčíslitelný.