Dokážte ekvivalenciu Chomského definície a štandardnej definície kontextových gramatík (CSG).
Pre CSG s množinou terminálov T a množinou neterminálov N

- Chomského definícia je, že pravidlá CSG majú tvar "$u\ \alpha\ v \rightarrow u\ \beta\ v$", kde $u,v \in (N \cup T)^*$, $\alpha \in N$, $\beta \in (N \cup T)^+$
- Štandardná definícia je, že pravidlá CSG majú tvar "$u \rightarrow v$", kde $u,v \in (N \cup T)^+$ a zároveň $|u| \leq |v|$

1. $L(G_{Ch}) \subseteq L(G_N)$
   Ukážeme, že pravidlá Chomského definície spĺňajú podmienky štanardnej definície.

   - Keďže v G_{Ch} $\beta \in (N \cup T)^+$, => $\beta \neq \varepsilon$ => $|\ u\ \alpha\ v\ | \leq |\ u\ \beta\ v\ |$ čo spĺňa podmienku pre G_N : $|u| \leq |v|$
   - "$u\ \alpha\ v$" v G_{Ch} má tvar $(N \cup T)^*\ N\ (N \cup T)^*$ čo je vlastne $(N \cup T)^+$ a teda ľavá strana spĺňa podmienky štandardnej definície kontextových gramatík pre ľavú stranu.
   - "$u\ \beta\ v$" v G_{Ch} má tvar $(N \cup T)^*\ (N \cup T)^+\ (N \cup T)^*$ čo je vlastne $(N \cup T)^+$ a teda pravá strana spĺňa podmienky štandardnej definície kontextových gramatík pre pravú stranu.
   - z toho je zrejmé, že pravidlá Chomského definície spĺňajú podmienky štanardnej definície
     => $L(G_{Ch}) \subseteq L(G_N)$

2. $L(G_N) \subseteq L(G_{Ch})$
   Zoberme si teda ľubovolnú kontextovú gramatiku, kde pravidlá spĺňajú podmienky štandardnej definície. Pre zjednodušenie všetky terminály v pravidlách nahradíme novými neterminálmi tak, že každý terminál T bude mať jedinečný neterminál N_T a k nemu pravidlo $N_T \rightarrow T$. Výsledný jazyk sa nezmení. Pravidlá budú fungovať ako predtým a ak by v pôvodnej forme vytvorili terminálne slovo $T_{i1}\ T_{i2}\ ...T_{ik}$, teraz vytvorí vetnú formu $N_{Ti1}\ N_{Ti2}\ ...N_{Tik}$ ktorá sa použitím novododaných pravidiel prepíše na $T_{i1}\ T_{i2}\ ...T_{ik}$. Ak by sa nové pravidlo $N_T \rightarrow T$ použilo skôr ako v prechádzajúcom prípade, dostaneme vetnú formu, v ktorej sa vyskytuje terminál. Žiadne z prerobených pravidiel neobsahuje na ľavej strane terminál, teda ak sa N_T vyskytovalo v kontexte iného pravidla, nebude možné toto pravidlo už na túto časť vetnej formy použiť, čo môže viesť k stavu, že sa nebude dať odvodiť terminálne slovo.

   Teraz nejaké k-te pravidlo vyzerá takto :
   $N_{i1}\ N_{i2}\ ...N_{is} \rightarrow N_{j1}\ N_{j2}\ ...N_{jt}$ kde $s \leq t$

   Pre toto k-te pravidlo vytvoríme s nových neterminálov $N_1^k, N_2^k, ..., N_s^k$
   a pravidlá

   (1) $N_{i1}\ N_{i2}\ ...N_{is} \rightarrow N_1^k\ N_{i2}\ ...N_{is}$ \
   $N_1^k\ N_{i2}\ ...N_{is} \rightarrow N_1^k\ N_2^k\ ...N_{is}$ | Spĺňajú požiadavky Chomského definície
   : | je to vlastne prechod $N_{i1}\ N_{i2}\ ...N_{is} \rightarrow N_1^k\ N_2^k ...N_s^k$
   $N_1^k\ N_2^k ...N_{is} \rightarrow N_1^k\ N_2^k\ ...\ N_s^k$ /

   (2) $N_1^k\ N_2^k\ ...\ N_s^k \rightarrow N_{j1}\ N_2^k\ ...\ N_s^k$ \
   $Nj_1\ N_2^k\ ...\ N_s^k \rightarrow N_{j1}\ N_{j2}\ ...\ N_s^k$ | Spĺňajú požiadavky Chomského definície
   : | je to vlastne prechod $N_1^k N_2^k ...N_s^k \rightarrow N_{j1}\ N_{j2}\ ...N_{jt}$
   $Nj_1\ N_{j2}\ ...\ N_{js-1}\ N_s^k \rightarrow N_{j1}\ N_{j2}\ ...\ N_{js-1}\ N_{js} ...N_{jt}$ /

   Dokopy dávajú prechod $N_{i1}\ N_{i2}\ ...N_{is} \rightarrow N_{j1}\ N_{j2}\ ...N_{jt}$ ktorý sme chceli "odsimulovať" pomocou pravidiel spĺňajúcich požiadavky Chomského definície.

   Ak máme nejaké odvodenie terminálneho slova v gramatike podľa štandardnej definície, odvodenie toho istého slova v "upravenej" gramatike podľa Chomského bude vyzerať tak, že ak sme použili v pôvodnom odvodení k-te pravidlo $N_{i1}\ N_{i2}\ ...N_{is} \rightarrow N_{j1}\ N_{j2}\ ...N_{jt}$, tu použijeme pravidlá "prechodu". Teda v konečnom dôsledku nám to vygeneruje to isté slovo.

   A že to nevygeneruje nič navyše ?
   Ukážeme, že ak používame "prechodové" pravidlá, je odvodenie jednoznačné
   Ak použijeme pravidlo, ktoŕemu sme priradili "prechodové" pravidlá, tak sa odvoláme na pôvodnú gramatiku
   Indukcia vzhľadom na počet krokov odvodenia :
   1, v prvom kroku sa vychádza z pôvodného pravidla $\sigma \rightarrow N_{j1}\ N_{j2}\ ...N_{jt}$ K tomu máme vytvorené pravidlá
   $\sigma \rightarrow N_1^1$
   $N_1^1 \rightarrow N_{j1}\ N_{j2}\ ...N_{jt}$ Pre každé pravidlo začínajúcemu sigmou sú nové neterminály rôzne
   Keďže N_1^1 je jedinečný a už sa nevyskytuje v žiadnom inom pravidle (či už prechodovom, alebo pôvodnom), postup zo sigmy musí zákonite viesť touto cestou. Odsimulovali sme $\sigma \rightarrow N_{j1}\ N_{j2}\ ...N_{jt}$ v Chomského tvare a ďalej sa môžeme oprieť o prechod v pôvodnej gramatike.

2, Nech sme vykonali k-krokov, ako môže vyzerať k+1.

a, celá vetná forma je zložená len z neterminálov pôvodnej gramatiky.
Potom buď sa začnú prepisovať neterminály pravidlami N_T -> T na terminály – odvoláme sa na pôvodnú gramatiku
Alebo použijeme "prechodové" pravidlo. Vtedy vstúpime do prechodovej vetvy s novými neterminálmi a tu je cesta jednoznačne určená tak, ako v 1. kroku indukcie

b, ak sú tam aj pôvodné neterminály aj terminály novovytvorené pre "prechodové" účely.
1, Prepisovanie na terminály je to isté, ako v prípade a,
2, Ak prepisujeme konzistentnú prechodovú časť vetnej formy (počas predchádzajúceho prepisovania sa na danú časť vetnej formy použili len príslušné prechodové pravidlá), je toto pravidlo jednoznačne určené
3, Ak použijeme na časť vetnej formy v prechodovom tvare iné ako nasledujúce prechodové pravidlo, zmení sa kontext a nebude sa dať použiť ďalšie prechodové pravidlo. Vo vetnej forme nám tak zostanú neterminály z prechodových pravidiel, ktoré nie je možné inak prepísať na terminály a teda táto cesta vevygeneruje terminálne slovo.