Zadanie :

Nech L je deterministický bezkontextový jazyk. Dokážte, že :

1) $L \cap R \in L_{detCF}$
2) Min (L) $\in L_{detCF}$, kde Min (L) = { $w \in L$ | pre všetky x, y také, že w = xy a $x \in L$, platí že $x = \varepsilon$ }

Riešenie :

1) $L \cap R \in L_{detCF}$

Na riešenie tejto úlohy využijeme aj vetu, ktorá hovorí, že trieda detrministických bezkontextových jazykov je uzavretá na prienik s regulárnym jazykom. Ďalej vieme, že trieda deterministických bezkontextových jazykov je ekvivalentná deterministickým zásobníkovým automatom a trieda regulárnych gramatík je ekvivalentná deterministickým konečným automatom. Zostrojme teda k deterministickému bezkontextovému jazyku L deterministický zásobníkový automat A_L a k regulárnemu jazyku R deterministický konečný automat A_R. K týmto dvom automatom zostrojíme deterministický zásobníkový automat A, pre ktorý platí $L(A_L) \cap L(A_R) = L(A)$.Výsledný automat teda bude:
$A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde $K = K_L \times K_R$, $\Sigma = \Sigma_L \cap \Sigma_R$, $\Gamma = \Gamma_L$, $q_0 = (q_{L0}, q_{R0})$, $Z_0 = Z_{0L}$, $F = F_L \times F_L$ a δ - funkcia vyzerá nasledovne :

$$\delta((q_L, q_R), a, A) \rightarrow \{ ((r, s), B) \mid (r, B) \in \delta_L(q_L, a, A) \wedge s = \delta_R(q_R, a) \} \text{ pre } a \in \Sigma$$

$$\delta((q_L, q_R), a, A) \rightarrow \{ ((r, q_R), B) \mid (r, B) \in \delta_L(q_L, a, A) \} \text{ pre } a = \varepsilon.$$

Ľahko sa dá ukázať, že platí :

$$(q_{L0}, w, \gamma_{z0}) \overset{*}{\underset{AL}{\rightarrow}} A_L(q_{LF}, \varepsilon, \gamma_k) \wedge (q_{R0}, w) \overset{*}{\underset{AR}{\rightarrow}} A_R(q_{RF}, \varepsilon) \Leftrightarrow ((q_{L0}, q_{R0}), w, \gamma_{k0}) \overset{*}{\underset{A}{\rightarrow}} A((q_{LF}, q_{RF}), \varepsilon, \gamma_k)$$

z čoho vyplýva dokazované tvrdenie. Platiť to musí, pretože aby automat A akceptoval slovo w, tak toto slovo musí akceptovať aj automat A_L aj automat A_R (vyplýva z konštrukcie) a platí to aj opačne. Ak akceptuje automat A, tak vieme tento výpočet rozložiť na dva výpočty, pričom jeden odsimuluje automat A_L a druhý automat A_R (čo tiež vidno z konštrukcie).

2) Min (L) $\in L_{detCF}$, kde Min (L) = { $w \in L$ | pre všetky x, y také, že w = xy a $x \in L$, platí že $x = \varepsilon$ }

Najskor si treba uvedomiť, čo vlastne tento zápis znamená. Znamená asi toľko, že neexistuje žiadny prefix slov patriacich do tohto jazyka, ktorý by tiež patril do tohto jazyka. Inak povedané neexistuje slovo v tomto jazyku, ktore by bolo prefixom nejakého iného slova v tomto jazyku. Kedže trieda deterministických bezkontextových jazykov je ekvivalentná deterministickým zásobníkovým automatom, tak potrebujeme akurát ukázať, že dokážeme zostrojiť deterministický zásobníkový automat, ktorý ak sa raz dostane do akceptačného stavu, tak skončí (akceptuje). Označme automat, ktorý je ekvivalentný povodnému jazyku L, $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ (štandardná definícia deterministického zásobníkového automatu).

Nový automat A' = (K',Σ',Γ',δ',q_0',Z_0',F') z A spravíme tak, že zachováme pôvodnú vstupnú abecedu, pracovnú abecedu, počiatočný stav, ponecháme aj nezmenené tak stavy automatu, ako aj akceptačné stavy automatu. Jediné čo potrebujeme pozmeniť je δ - funkcia pôvodného automatu. Túto zmeníme nasledovným spôsobom :

$$\delta' = \delta - \{(q_x, a, b) \rightarrow (q_y, c) ; \forall q_x \in F, \forall q_y \in K, a \in \Sigma, b,c \in \Gamma\}$$

tj. zrušíme všetky prechody z akceptačných stavov. Pre úlnosť ešte dodám, že výsledný automat A' akceptuje stavom. Takto vytvorený nový automat nemôže akceptovať žiadne slovo, ktoré by ako prefix obsahovalo nejaké iné slovo z jazyka.

Dôkaz :

Kde bolo tam bolo bol jeden zásobníkový automat A, ktorý nebol len taký automat, ale bol to deterministický zásobníkový automat, ktorý rozpoznával jazyk L. Z tohto automatu sme odstránením časti jeho δ - funkcie dostali výsledný automat. Kedže sme zachovali všetko okrem okrem δ, tak stačí ukázať, že aj výsledný automat spĺňa podmienku deterministického zásobníkového automatu. Takže musíme ukázať, že je zachovaná podmienka $(\forall q \in K)(\forall z \in \Gamma)(\delta(q, \varepsilon, z) \neq 0 \Rightarrow (\forall a \in \Sigma)\ \delta(q, a, \gamma) = 0)$. Táto podmienka, ale musí byť zachovaná, pretože ak je zachovaná v pôvodnom automate, tak platí aj vo výslednom (myslím, že je to dostatočne zrejmé z konštrukcie).

To, že výsledný automat akceptuje len slová tvoriace Min (L) je zrejmé z konštrukcie (vo výpočte nemože nastať situácia, že by prešiel cez akceptačný stav do iného stavu).

Juraj Ursíny