Konštrukcia LBA ku kontextovej gramatike

Juraj Vaško

7. marca 2001

Zadanie

Majme danú kontextovú gramatiku G. Zostrojte lineárne ohraničený automat (LBA) A, taký že $L(G) = L(A)$. Pri simulácii použite spätné odvodenie (teda postupne na páske robíte spätné kroky až kým sa nedostanete ku σ). Pri dôkaze použite matematickú indukciu.

Riešenie

Nech povôdná kontextová gramatika G je bez újmy na všeobecnosti daná ako $G = (N, T, P, \sigma)$ kde N je množina neterminálov, T je množina terminálov, P je množina odvodzovacích pravidiel a $\sigma \in N$ je počiatočný symbol. Nech ďalej $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ kde P_i je i–te pravidlo a m je mohutnosť P. Pre každé pravidlo P_i označme jeho ľavú stranu L_i pričom $L_i = l_{i,1}l_{i,2}\ldots l_{i,|L_i|} \wedge l_{i,j} \in (N \cup T) \wedge j \in \{1 \ldots |L_i|\}$ a jeho pravú stranu R_i pričom $R_i = r_{i,1}r_{i,2}\ldots r_{i,|R_i|} \wedge r_{i,j} \in (N \cup T) \wedge j \in \{1 \ldots |R_i|\}$. Keďže G je kontextová potom $\forall(i \in \{1 \ldots |P|\})|L_i| \leq |R_i|$. Definujme teraz hľadaný LBA A ako $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_s, F)$ kde $\Sigma = T$, $\Gamma = \Sigma \cup N \cup \{¢, \$, \emptyset\}$, pričom bez újmy na všeobecnosti predpokladáme, že $(N \cup T) \cap \{¢, \$, \emptyset\} = \emptyset$. K je množina stavov, $K = \{q_s, q_{sok}, q_{eok}, q_{ok}, q_p, q_r\} \cup \{p_{i,j} | i \in \{1 \ldots |P|\} \wedge j \in \{1 \ldots |R_i|\}\} \cup \{s_{i,j} | i \in \{1 \ldots |P|\} \wedge j \in \{1 \ldots |L_i|\}\}$. F je množina akceptačných stavov $F = \{q_{ok}\}$. Prechodovú funkciu δ definujme nasledovne, pričom v prípade že pre jednu dvojicu $q \in K$ a $a \in \Gamma$ existuje viac pravidiel definujeme hodnotu $\delta(q, a)$ ako zjednotenie ich výsledkov.

$$\delta(q_s, ¢) = \{(q_{sok}, ¢, 1)\} \tag{1}$$
$$\delta(q_s, ¢) = \{(q_p, ¢, 1)\} \tag{2}$$
$$\delta(q_{sok}, \emptyset) = \{(q_{sok}, \emptyset, 1)\} \tag{3}$$
$$\delta(q_{sok}, \sigma) = \{(q_{eok}, \sigma, 1)\} \tag{4}$$
$$\delta(q_{eok}, \emptyset) = \{(q_{eok}, \emptyset, 1)\} \tag{5}$$
$$\delta(q_{eok}, \$) = \{(q_{ok}, \$, 0)\} \tag{6}$$
$$\delta(q_p, a) = \{(q_p, a, 1)\} \leftarrow a \in \Gamma / \{\$\} \tag{7}$$
$$\delta(q_p, a) = \{(p_{i,1}, a, 0) | i \in \{1 \ldots |P|\}\} \leftarrow a \in \Gamma / \{\$\} \tag{8}$$
$$\delta(q_r, a) = \{(q_r, a, -1)\} \leftarrow a \in \Gamma / \{¢\} \tag{9}$$
$$\delta(q_r, ¢) = \{(q_s, ¢, 0)\} \tag{10}$$
$$\delta(p_{i,j}, \emptyset) = \{(p_{i,j}, \emptyset, 1)\} \leftarrow i \in \{1 \ldots |P|\} \wedge j \in \{1 \ldots |R_i|\} \tag{11}$$
$$\delta(p_{i,j}, r_{i,j}) = \{(p_{i,j+1}, \emptyset, 1)\} \leftarrow i \in \{1 \ldots |P|\} \wedge j \in \{1 \ldots |R_i| - 1\} \tag{12}$$

$$\delta(p_{i,|R_i|}, r_{i,|R_i|}) = \{(s_{i,|L_i|}, \emptyset, 0)\} \leftarrow i \in \{1 \ldots |P|\} \tag{13}$$

$$\delta(s_{i,j}, \emptyset) = \{(s_{i,j-1}, l_{i,j}, -1)\} \leftarrow i \in \{1 \ldots |P|\} \wedge j \in \{2 \ldots |L_i|\} \tag{14}$$

$$\delta(s_{i,1}, \emptyset) = \{(q_r, l_{i,1}, -1)\} \leftarrow i \in \{1 \ldots |P|\} \tag{15}$$

Dôkaz

Rovnosť $L(A) = L(G)$ bude vyplývať z ďalej dokázaných inklúzií $L(A) \subseteq L(G)$ a zároveň $L(G) \subseteq L(A)$

Definujme funkciu $h : (N \cup T \cup \{\emptyset\})^* \rightarrow (N \cup T)^*$ ako

$$h(aw) = a\, h(w) \leftarrow a \in N \cup T \tag{16}$$

$$h(aw) = h(w) \leftarrow a = \emptyset \tag{17}$$

$$h(\epsilon) = \epsilon \tag{18}$$

$\mathbf{L(G)} \subseteq \mathbf{L(A)}$

Nech $w \in L(G) \wedge w = w_1 w_2 \ldots w_n \wedge w_i \in T \wedge i \in \{1, \ldots, n\}$. Potom existuje konečné odvodenie slova w v G také, že $\sigma \Rightarrow^*_G w$. Počet krokov tohoto odvodenia označme k. Majme na vstupe A slovo w a hľadajme akceptujúci výpočet v A.

Zoberme teraz akékoľvek odvodenie tvaru $\sigma \Rightarrow^* w$ v G kde $w \in (N \cup T)^+ \wedge |w| <= n$ kde $n > 0$ je dané. Použime teraz matematickú indukciu vzhľadom na dĺžku tohoto odvodenia. Za indukčný predpoklad pre dĺžku i zvoľme

$$(\forall v \in (N \cup T \cup \{\emptyset\})^* \wedge h(v) = w \wedge |v| = n) \exists ((q_s, \cent v\$, 0) \vdash^* (q_{ok}, \cent u\$, n+1)) \wedge |u| = n \tag{19}$$

Báza indukcie pre $i = 0$ žiada nájdenie výpočtu podľa (19) pre $w = \sigma$ ak neboli urobené žiadne kroky odvodenia. Majme teda nejaké v spĺňajúce podmienky (19). Potom z vlastností h vyplýva, že existuje index $j \in \{1 \ldots n\}$ taký, že $v_j = \sigma$ a všetky ostané znaky vo v sú $\emptyset$. Potom môžeme urobit krok výpočtu (1), čím sa dostaneme do stavu q_{sok} a prejdeme na prvý symbol z v. Následne použijeme $j - 1$–krát (3) čím preskočíme symboly $\emptyset$ pred σ a hlava zostane na symbole σ. Použijeme (4) a následne $n - j$–krát (3), čím prečítame symbol σ, všetky symboly $\emptyset$ do konca slova a zostame na symbole \$. Použijeme už len (6), čím prejdeme do stavu $q_{ok} \in F$.

Na dôkaz indukčného kroku predpokladajme že indukčný predpoklad platí pre dĺžku odvodenia i z čoho ho dokážeme pre dĺžku $i + 1$. Číslo pravidla použitého v poslednom $(i + 1)$ kroku označme t. Slovo pred týmto krokom označme w' a po ňom w. Potom $w = xR_t y \wedge w' = xL_t y$ pre nejaké $x, y \in (N \cup T)^*$. Nech sa teda automat nachádza v konfigurácii $(q_s, \cent v\$, 0)$ pre nejaké v spĺňajúce podmienky v (19). Zapíšme $v = v_1 v_2 \ldots v_n \wedge w = w_1 w_2 \ldots w_{|w|}$, potom však z definície h vyplýva, že $(\exists J = \{j_0, \ldots j_{|w|}\}) \wedge j_l \in \{1 \ldots n\} \wedge v_{j_l} = u_l \wedge (l_1 < l_2 \implies j_{l_1} < j_{l_2}) \wedge ((\forall l \notin J) v_l = \emptyset)$. Teda pre každý symbol z w existuje jeho pozícia vo v, pričom poradie symbolov je vo v zachované a na všetkých miestach vo v, ku ktorým neprislúchajú symboly z w je symbol $\emptyset$. Z toho vyplýva, že $v_{j_{|x|}} v_{j_{|x|+1}} \ldots v_{j_{|x|+|R_t|}} = R_l$. Potom môžeme pokračovať vo výpočte automatu nasledovným spôsobom. Prejdeme z q_s za pomoci (2) do stavu q_p a $j_{|x|}$–krát použijeme (7), čím sa dostaneme na pozíciu prvého symbolu z R_t, pričom sme pásku nemodifikovali. Ďalej použijeme (8) a prejdeme do stavu $p_{t,0}$ spracuvávajúceho pravidlo P_t. Pre každý znak z R_t aplikujeme potrebný počet krát pravidlo (11) aby sme preskočili znaky $\emptyset$ medzi symbolmi z R_t (pre prvý znak z R_t to bude 0-krát, pre l-ty $j_{|x|+l} - j_{|x|+l-1} - 1$ krát). Následne pre posledný znak z R_t aplikujeme (13), aby sme prešli do zápisu L_t a pre ostatné znaky použijeme príslušnú formu (12) aby sme prešli na spracovanie nasledujúceho znaku z R_l. Keď sa týmto spôsobom dostaneme do do stavu $s_{t,|L_t|}$, teda začiatku zápisu L_t na pásku budú všetky symboly z v od pozície $j_{|x|+1}$ po $j_{|x|+|R_t|}$ podľa definície δ prepísané na $\emptyset$. Následne postupne použijeme pravidlá (14) čím zapíšeme na pásku L_t. Na tento zápis bude určite dostatok miesta, pretoze G je kontextová. Z definície δ vyplýva, že sa budeme nachádzať stave q_r. Použijeme (9) potrebný počet krát, až kým sa nevrátime na začiatok pásky. Potom použijeme (10) a prejdeme do stavu q_s pričom sa budeme nachádzať na symbole ¢, teda na začiatku pásky. Týmto výpočtom sme modifikovali pôvodné slovo v tak, ze sme vybraný výskyt R_l (vrátane vnútorných symbolov $\emptyset$) nahradili L_l a prebytočné miesto sme doplnili symbolmi $\emptyset$, žiadne iné zmeny však nenastali. Potom ale z predpokladu $h(v) = w = xR_ly$ a uvedených zmien vyplýva ze $h(v') = xL_ly = w'$, kde v' je v po vykonaní popísaných zmien. Z toho však vyplýva, že sme našli výpočet z $(q_s, ¢v\$, 0)$ do $(q_s, ¢v'\$, 0)$ taký, že $h(v') = w'$. Použime teraz indukčný predpoklad pre odvodenie vetenej formy w bez posledného kroku, teda $\sigma \Rightarrow^* w'$ a $v = v'$. Tento zaručuje existenciu výpočtu $(q_s, ¢v'\$, 0) \vdash^* (q_{ok}, ¢u\$, n+1)$. Výpočet, ktorý sme hladali bude potom vykonanie popísaného výpočtu a následne výpočtu z indukčného predpokladu, čím je indukčný krok dokázaný. Uvažuje teraz pôvodné slovo w, pre ktoré hľadáme výpočet v A. Odvodenie tohoto slova má tvar požadovaný v indukcii. Za premennú n v indukcii položme $n = |w|$ a za v položme $v = w$, ktoré je tiež vyhovujúce. Potom máme z indukcie zaručenú existenciu výpočtu $(q_s, ¢w\$, 0) \vdash^* (q_{ok}, u, k+1)$, čo keďže $q_{ok} \in F$ je výpočet akceptačný a teda ten, ktorý sme hľadali.

$\mathbf{L(A) \subseteq L(G)}$

Nech $w \in L(A) \wedge |w| = n$ z čoho $w \in T^+$. Potom existuje konečný výpočet v A taký, že $(q_s, ¢w\$, 0) \vdash^* (q_{ok}, ¢v\$, j)$ kde q_{ok} jediný akceptačný stav A, $v \in (N \cup T \cup \{\emptyset\})^n$ a $j \in \{1 \ldots n\}$. Nájdime pre toto w jeho odvodenie v G.

Ukážme najprv ako vyzerá záverečná časť akéhokoľvek akceptačného výpočtu. Z definície δ je vidno, že do koncového stavu q_{ok} je možné prejsť len zo stavu q_{eok} pomocou (6). Teda tento krok musel byť ako predposledný krok výpočtu. Do stavu q_{eok} sme sa mohli dostať z q_{eok} po prečítaní $\emptyset$ a posunutí do prava alebo z q_{sok} po prečtaní σ a posunutí do prava. Z uvedeného a z toho že z q_{eok} je možné prejsť len do akceptačného stavu q_{ok} vyplýva, že vo výpočte musela byť pred spomenutou sekvenciou sekvencia jedného použitia (4) a následne nejakého (aj nulového) počtu použití (5). Z uvedeného a vlastností δ vyplýva, že koniec pásky musel mať pred koncom výpočtu tvar $\sigma\{\emptyset\}^*\$$ a automat bol v stave q_{sok} s hlavou nad symbolom σ. Z toho, že do q_{sok} je možné sa dostať len s q_s alebo z q_{sok} a z toho, že z q_{sok} sa nie je možné vrátiť do q_s vyplýva a že pred už uvedenou sekvenciou musela vo výpočte byť sekvencia jedného použita (1) a následného niekoľkonásobného (aj nulového) použitia (3). Potom sme však boli na začiatku koncovej sekvencie výpočtu v stave q_s s hlavou nad symbolom ¢ a s páskou v tvare $¢v\$$, pričom $|v| = n \wedge v = \{\emptyset\}^*\sigma\{\emptyset\}^*$ a teda $h(v) = \sigma$. Z uvedeného je ďalej zrejmé, že keďže z nijakého zo stavov q_{sok}, q_{eok}, q_{ok} neexistuje cesta späť do stavu q_s automat sa v týchto stavoch nikdy pred koncovou sekvenciou nemôže nachádzať.

Uvažujme teraz ľubovoľnú časť nejakého akceptačného výpočtu v A nasledovného tvaru $(q_s, ¢w\$, 0) \vdash^* (q_{ok}, ¢w'\$, n+1)$ kde $|w| = n \wedge n > 0 \wedge w \in (N \cup T \cup \{\emptyset\})^n \wedge \#_\emptyset w < n$ a podľa predchádzajúceho tvrdenia o akceptačných výpočtoch $h(w') = \sigma$. Označme počet výskytov prechodov zo stavu q_s do stavu q_p (a teda vzhľadom na definíciu δ použití (2)) v takomto výpočte vetnej formy w symbolom k. Urobme teraz indukciu vzhľadom na k. Za indukčný predpoklad pre i použití zoberme tvrdenie

$$(\exists \sigma \Rightarrow^* u) \wedge h(w) = u \tag{20}$$

Báza indukcie žiada nájdenie odvodenia (20) pre $i = 0$. Potom však celý výpočet pozostával len s prechodu od q_s do q_{ok} ako bol popísaný vyššie, z čoho takisto vieme , že pre stav q_s bolo na páske slovo v a $h(v) = \sigma$, z čoho vyplýva, keďže vo výpočte neboli iné kroky, že $w = v$ a $h(w) = \sigma$. Potom však nemusíme nic odvádzať, keďze máme nájsť odvodenie $\sigma \Rightarrow^* \sigma$.

V indukčnom kroku predpokladajme, že indukčný predpoklad platí pre počet výskytov i a dokážme ho pre počet $i+1$. Nech teda vo výpočte vetnej formy w spĺňajúcom udané podmienky je (2) použité $i+1$–krát. Keďže počiatoňý stav výpočtu je podľa podmienok q_s, potom je zrejmé, že (2) muselo byť použité hneď v prvom kroku. Keďze je však výpočet akceptačný musel byť v jeho ďalšom priebehu znova dosiahnutý stav q_s, pretože len z tohoto stavu je možné prejsť do stavu akceptačného ako bolo ukázané. Potom však z vlastností δ vyplýva, že výpočet mohol prebiehať len jedným spôsobom a to tak ako bude popísané ďalej. Najprv j-násobným použitím (7), pre $0 \leq j$, pri ktorom sa páska nezmenila a hlava sa posunula na $j+1$–vý symbol v slove w. Následne muselo byť použité (8), pre nejaké pravidlo, ktorého číslo označme t. Týmto prechodom do stavu $p_{t,1}$ sa nezmenilo nič okrem stavu samotného. Ďalej musel nasledovať prechod postupne cez všetky stavy $p_{t,j}$ pre $j \in \{1 \dots |R_t|\}$. Pri tomto prechode sme našli vo vetnej forme w vetnú formu v takú, že $h(v) = R_t$ a teda vetná forma w mala pôvodne tvar $w = xvy$ pre nejaké $x, y \in (N \cup T \cup \{\emptyset\})^*$ Týmto prechodom sme však všetky symboly vetnej formy v na páske prepísali na $\emptyset$. Ďalej sme museli prejsť pomocou (13) do stavu $s_{t,|L_t|}$ a následne postupne cez všetky stavy $s_{t,j}$ pre $j \in \{1 \dots |L_t|\}$ až do stavu q_r. Pri tomto prechode sme na pásku zapísali vetnú formu formu L_t tak, že jej posledný symbol je zapísaný na mieste kde bol na páske posledný symbol v slove v. Získali sme takto novú vetnú formu $w' = x\{\emptyset\}^* L_t y$. Výpočet musel ďalej pokračovať niekoľkonásobným použitím (9), ktoré nezmenilo pásku, len posunulo hlavu na symbol ¢. Nakoniec bolo použité (10) na prechod do stavu q_s, ktoré pásku nezmenilo taktiež. Po týchto krokoch sa nachádzame v konfigurácii $(q_s, ¢w'\$, 0)$. Vo zvyšku výpočtu sa nachádza použitie (2) už len i–krát a teda je možné použiť vzhľadom na dosiahnutú konfiguráciu na zvyšok výpočtu indukčný predpoklad za ktorého pomoci získame odvodenie $\sigma \Rightarrow^* h(w')$. Uvedomme si ale, že v uvedenej časti výpočtu sme prepísali len časť vetnej formy w v, takú, že $h(v) = R_t$ pre pravidlo $P_t \in P$ na slovo v' také, že $h(v') = L_t$ pre to isté pravilo P_t. To však znamená, že pomocou P_t môžeme urobiť odvodenie $w' \Rightarrow w$. Aplikáciou tohoto odvodenia po odvodení získanom z indukčného predpokladu máme hľadané odvodenie $\sigma \Rightarrow^* h(w)$, čím je indukčný krok dokázaný.

Uvažuje teraz pôvodné slovo w, pre ktoré hľadáme odvodenie v G. Výpočet tohoto slova začína v konfigurácii $(q_s, ¢w\$, 0)$ a keďže $w \in T^*$ a výpočet je akceptačný sú splnené podmienky dokázanej indukcie, z ktorej vyplýva, že takéto odvodenie existuje, čím je dôkaz hotový.