Zadanie (Úloha 1)

Kód grafu je slovo w nad abecedou {1, 0, #}, také že $w = e_1\#\#e_2\#\#\ldots\#\#e_n$ pričom e_i je kód hrany, taký že $e_I = v_1\#v_2$, kde v_i je binárne číslo vrcholu.
To jest, kód grafu je zoznam jeho hrán (oddelených ##), pričom hrana sa skladá z dvoch vrcholov (oddelených #).
Pre jazyk L

$L = \{ w \mid w$ je kód grafu, ktorý obsahuje cyklus $\}$

Zostrojte turingov stroj (TM) M, taký že L(M) = L. Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie

$M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$

$K = \{ q_0, q_{OK}, q_{NO}, q_{n1}, q_{n2}, q_{n3}, q_{n4}, q_{m1}, q_{m2}, q_{m3}, q_{m4}, q_{zk}, q_z, q_{hc}, q_{h1c}, q_{h1k}, q_{h2c}, q_{h2k}, q_{pz}, q_{c1}, q_{c0}, q_{c\#}, q_{p1}, q_{p0}, q_{p\#}, q_d \}$

$\Sigma = \{ 1, 0, \# \}$

$\Gamma = \{ 1, 0, \#, @ \}$

$F = \{ q_{OK} \}$

$\delta(q_0, 0) = \{(q_{n1}, 0, 0), (q_{m1}, 0, 0)\}$
$\delta(q_0, 1) = \{(q_{n1}, 1, 0), (q_{m1}, 1, 0)\}$
$\delta(q_0, \#) = \{(q_{NO}, \#, 0)\}$
$\delta(q_0, \mathbf{B}) = \{(q_{NO}, \#, 0)\}$

$\delta(q_{NO}, 0) = \{(q_{NO}, 0, 0)\}$
$\delta(q_{NO}, 1) = \{(q_{NO}, 1, 0)\}$
$\delta(q_{NO}, \#) = \{(q_{NO}, \#, 0)\}$
$\delta(q_{NO}, \mathbf{B}) = \{(q_{NO}, \#, 0)\}$

$\delta(q_{n1}, 0) = \{(q_{n1}, 0, 1)\}$
$\delta(q_{n1}, 1) = \{(q_{n1}, 1, 1)\}$
$\delta(q_{n1}, \#) = \{(q_{n2}, \#, 1)\}$
$\delta(q_{n1}, \mathbf{B}) = \{(q_{NO}, \#, 0)\}$

$\delta(q_{n2}, 0) = \{(q_{n3}, 0, 1)\}$
$\delta(q_{n2}, 1) = \{(q_{n3}, 1, 1)\}$
$\delta(q_{n2}, \#) = \{(q_{NO}, \#, 0)\}$
$\delta(q_{n2}, \mathbf{B}) = \{(q_{NO}, \#, 0)\}$

$\delta(q_{n3}, 0) = \{(q_{n3}, 0, 1)\}$
$\delta(q_{n3}, 1) = \{(q_{n3}, 1, 1)\}$
$\delta(q_{n3}, \#) = \{(q_{n4}, \#, 1)\}$
$\delta(q_{n3}, \mathbf{B}) = \{(q_{zk}, \#, -1)\}$

$\delta(q_{n4}, 0) = \{(q_{NO}, 0, 0)\}$
$\delta(q_{n4}, 1) = \{(q_{NO}, 1, 0)\}$
$\delta(q_{n4}, \#) = \{(q_0, \#, 1)\}$
$\delta(q_{n4}, \mathbf{B}) = \{(q_{NO}, \#, 0)\}$

$\delta(q_{m1}, 0) = \{(q_{m1}, \#, 1)\}$
$\delta(q_{m1}, 1) = \{(q_{m1}, \#, 1)\}$
$\delta(q_{m1}, \#) = \{(q_{m2}, \#, 1)\}$
$\delta(q_{m1}, \mathbf{B}) = \{(q_{NO}, \#, 0)\}$

$\delta(q_{m2}, 0) = \{(q_{m3}, \#, 1)\}$
$\delta(q_{m2}, 1) = \{(q_{m3}, \#, 1)\}$
$\delta(q_{m2}, \#) = \{(q_{NO}, \#, 0)\}$
$\delta(q_{m2}, \mathbf{B}) = \{(q_{NO}, \#, 0)\}$

$\delta(q_{m3}, 0) = \{(q_{m3}, \#, 1)\}$
$\delta(q_{m3}, 1) = \{(q_{m3}, \#, 1)\}$
$\delta(q_{m3}, \#) = \{(q_{m4}, \#, 1)\}$
$\delta(q_{m3}, \mathbf{B}) = \{(q_{zk}, \#, -1)\}$

$\delta(q_{m4}, 0) = \{(q_{NO}, 0, 0)\}$
$\delta(q_{m4}, 1) = \{(q_{NO}, 1, 0)\}$
$\delta(q_{m4}, \#) = \{(q_0, \#, 1)\}$
$\delta(q_{m4}, \mathbf{B}) = \{(q_{NO}, \#, 0)\}$

$\delta(q_{zk}, 0) = \{(q_z, 0, -1)\}$
$\delta(q_{zk}, 1) = \{(q_z, 1, -1)\}$
$\delta(q_{zk}, \#) = \{(q_{zk}, \#, -1)\}$
$\delta(q_{zk}, \mathbf{B}) = \{(q_{NO}, \#, 0)\}$

$\delta(q_z, 0) = \{(q_z, 0, -1)\}$
$\delta(q_z, 1) = \{(q_z, 1, -1)\}$
$\delta(q_z, \#) = \{(q_z, \#, -1)\}$
$\delta(q_z, \mathbf{B}) = \{(q_{hc}, \#, 1)\}$

$\delta(q_{hc}, 0) = \{(q_{h1k}, 0, 1)\}$
$\delta(q_{hc}, 1) = \{(q_{h1k}, 1, 1)\}$
$\delta(q_{hc}, \#) = \{(q_{hc}, \#, 1)\}$
$\delta(q_{hc}, \mathbf{B}) = \{(q_{OK}, \#, 0)\}$

$\delta(q_{h1c}, 0) = \{(q_{h1k}, 0, 1)\}$
$\delta(q_{h1c}, 1) = \{(q_{h1k}, 1, 1)\}$
$\delta(q_{h1c}, \#) = \{(q_{h1c}, \#, 1)\}$
$\delta(q_{h1c}, \mathbf{B}) = \{(q_{NO}, \#, 0)\}$

$\delta(q_{h1k}, 0) = \{(q_{h1k}, 0, 1)\}$
$\delta(q_{h1k}, 1) = \{(q_{h1k}, 1, 1)\}$
$\delta(q_{h1k}, \#) =$
$\{(q_{h2c}, @, 1), (q_{h1c}, \#, 1)\}$

$\delta(q_{h2c}, 0) = \{(q_{h2k}, 0, 1)\}$
$\delta(q_{h2c}, 1) = \{(q_{h2k}, 1, 1)\}$
$\delta(q_{h2c}, \#) = \{(q_{h2c}, \#, 1)\}$
$\delta(q_{h2c}, \mathbf{B}) = \{(q_{NO}, \#, 0)\}$

$\delta(q_{h2k}, 0) = \{(q_{h2k}, 0, 1)\}$
$\delta(q_{h2k}, 1) = \{(q_{h2k}, 1, 1)\}$
$\delta(q_{h2k}, \#) =$
$\{(q_{pz}, \#, -1), (q_{h2c}, \#, 1)\}$

$\delta(q_{pz}, 0) = \{(q_{c0}, @, -1)\}$
$\delta(q_{pz}, 1) = \{(q_{c1}, @, -1)\}$
$\delta(q_{pz}, \#) = \{(q_{c\#}, \#, -1)\}$

$\delta(q_{c1}, 0) = \{(q_{c1}, 0, -1)\}$
$\delta(q_{c1}, 1) = \{(q_{c1}, 1, -1)\}$
$\delta(q_{c1}, \#) = \{(q_{c1}, \#, -1)\}$
$\delta(q_{c1}, @) = \{(q_{p1}, \#, -1)\}$

$\delta(q_{c0}, 0) = \{(q_{c0}, 0, -1)\}$
$\delta(q_{c0}, 1) = \{(q_{c0}, 1, -1)\}$
$\delta(q_{c0}, \#) = \{(q_{c0}, \#, -1)\}$
$\delta(q_{c0}, @) = \{(q_{p0}, \#, -1)\}$

$\delta(q_{c\#}, 0) = \{(q_{c\#}, 0, -1)\}$
$\delta(q_{c\#}, 1) = \{(q_{c\#}, 1, -1)\}$
$\delta(q_{c\#}, \#) = \{(q_{c\#}, \#, -1)\}$
$\delta(q_{c\#}, @) = \{(q_{p\#}, \#, -1)\}$

$\delta(q_{p1}, 0) = \{(q_{NO}, 0, 0)\}$
$\delta(q_{p1}, 1) = \{(q_d, @, 1)\}$
$\delta(q_{p1}, \#) = \{(q_{NO}, \#, 0)\}$

$\delta(q_{p0}, 0) = \{(q_d, @, 1)\}$
$\delta(q_{p0}, 1) = \{(q_{NO}, 1, 0)\}$
$\delta(q_{p0}, \#) = \{(q_{NO}, \#, 0)\}$

$\delta(q_{p\#}, 0) = \{(q_{NO}, 0, 0)\}$
$\delta(q_{p\#}, 1) = \{(q_{NO}, 1, 0)\}$
$\delta(q_{p\#}, \#) = \{(q_z, \#, -1)\}$

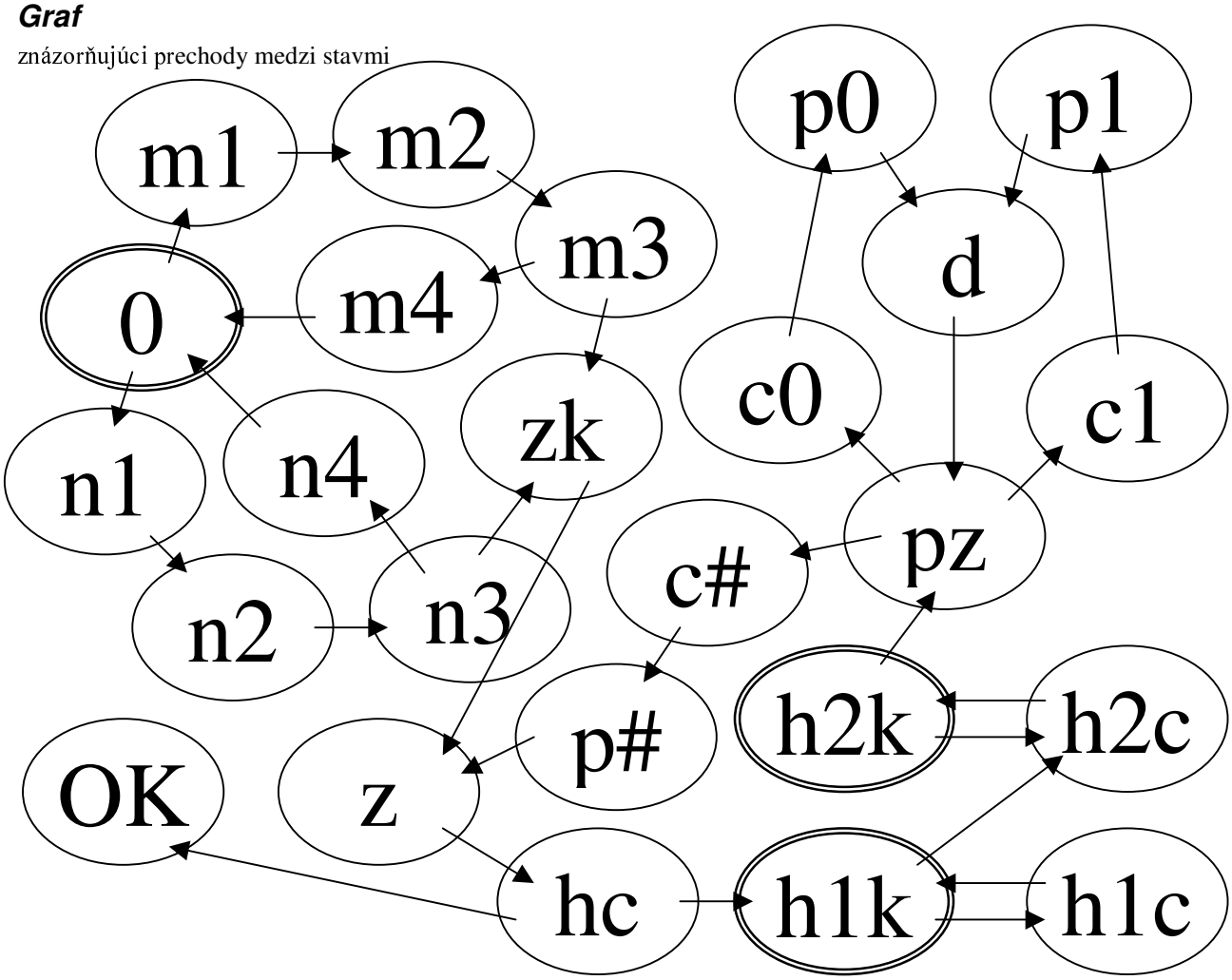
$\delta(q_d, 0) = \{(q_d, 0, 1)\}$
$\delta(q_d, 1) = \{(q_d, 1, 1)\}$
$\delta(q_d, \#) = \{(q_d, \#, 1)\}$
$\delta(q_d, @) = \{(q_{pz}, \#, -1)\}$

Dôkaz

Pri dôkaze budem vychádzať z faktu, že v každom cykle, ktorý neobsahuje iný cyklus, majú všetky vrcholy stupeň 2, vzhľadom na daný cyklus. To znamená, že z každého vrcholu, ktorý tvorí daný cyklus vychádzajú práve 2 hrany tvoriace tento cyklus. Z toho ďalej vyplýva, že keď v kóde grafu vynecháme všetky hrany, ktoré nie sú v takomto cykle, tak sa bude v kóde vyskytovať každé číslo vrcholu práve dva krát. Na druhú stranu, ak máme časť kódu grafu (graf bez niektorých hrán) a tá obsahuje každé číslo vrcholu práve dva krát, tak to musí byť jeden cyklus, alebo viac nezávislých cyklov, pretože samotné vrcholy stupňa 2 nemôžu tvoriť iný graf.

Nedeterministický TM M najprv tipne vrcholy, ktoré tvoria cyklus a ostatné vrcholy vymaže (nahradí #). Potom postupne tipuje dvojice čísel vrcholov, kde následne porovnáva, či sú čísla v dvojici rovnaké. V prípade že sú rovnaké ich vymaže a pokračuje, kým neprejde všetkými číslami.

Pritom používa dva špeciálne stavy - q_{OK} je akceptačný stav a q_{NO} je zacyklený stav, do ktorého M prejde v prípade, že počas výpočtu zistí, že nemôže skončiť úspešne.
Pravidlo q_0 rozhoduje, či bude nasledujúca hrana vymazaná, alebo zostane.
$\delta(q_0, 0) = \{(q_{n1}, 0, 0), (q_{m1}, 0, 0)\}$ $\delta(q_0, 1) = \{(q_{n1}, 1, 0), (q_{m1}, 1, 0)\}$
Samotné nevymazanie, alebo vymazanie zabezpečujú pravidlá q_{ni}, q_{mi}, ($i \in \{1,\ldots,4\}$), ktoré zároveň zabezpečujú prechod na q_{NO} v prípade, že vstup nebol korektný kód grafu. Vymazanie znamená prepísanie hrany znakmi #, ktoré sú v ďalšom výpočte ignorované, pretože ďalej už M rozlišuje iba čísla. (samozrejme oddelené aspoň 1 znakom #)
Následne použitím pravidiel
$\delta(q_{n3}, \mathbf{B}) = \{(q_{zk}, \#, -1)\}$ $\delta(q_{m3}, \mathbf{B}) = \{(q_{zk}, \#, -1)\}$
prejde M do stavu q_{zk}, ktorým spolu so stavom q_z prejde na začiatok a skontroluje, či máme aspoň jednu hranu nevymazanú. Odtiaľ pokračuje pravidlom
$\delta(q_z, \mathbf{B}) = \{(q_{hc}, \#, 1)\}$
do stavu q_{hc}, ktorý jediný obsahuje pravidlo na prechod do stavu q_{OK}
$\delta(q_{hc}, \mathbf{B}) = \{(q_{OK}, \#, 0)\}$
Samozrejme pri prvom prechode do stavu q_{OK} prejsť nemôže, pretože k tomuto pravidlu sa dostane iba v prípade, že už nezostali žiadne neskontrolované vrcholy.
Ak bol vstup korektný tak sa výpočet neskôr vráti do stavu q_z, vďaka čomu prebehne znovu kontrola v stave q_{OK}
$\delta(q_{p\#}, \#) = \{(q_z, \#, -1)\}$
(Názorne je to vidieť v priloženom grafe znázorňujúcom prechody medzi stavmi.)
Takže M v stave q_{hc} kontroluje, či už neskončil a v prípade že nie, tak prejde do stavu q_{h1k}
$\delta(q_{hc}, 0) = \{(q_{h1k}, 0, 1)\}$ $\delta(q_{hc}, 1) = \{(q_{h1k}, 1, 1)\}$
Stavy q_{h1c}, q_{h1k}, q_{h2c}, q_{h2k} sú na to, aby M hladal prvé a druhé číslo na porovnávanie. Čísla budú z praktických dôvodov porovnávané odzadu. Za obe čísla bude položená značka @, ktorá bude postupne po čísliciach presúvaná na začiatok a zároveň tým bude mazať toto číslo.
V stave q_{h1k} príde nedeterministické rozhodnutie, či bolo nájdené prvé číslo na porovnanie.
$\delta(q_{h1k}, \#) = \{(q_{h2c}, @, 1), (q_{h1c}, \#, 1)\}$
Ak áno tak si ho M označí a začne hladať druhé číslo, inak prejde do stavu q_{h1c} a bude hladať ďalšie číslo.
V stave q_{h2k} príde ďalšie rozhodnutie - či M našiel druhé číslo.
$\delta(q_{h2k}, \#) = \{(q_{pz}, \#, -1), (q_{h2c}, \#, 1)\}$
V prípade, že sa rozhodol že našiel, nebude si už značiť dané miesto, ale prejde rovno k porovnávaniu.
q_{pz} je stav v ktorom celé porovnávanie začína. Podľa toho čo M prečíta, prejde do jedného zo stavov q_{c1}, q_{c0}, $q_{c\#}$ v ktorom bude prenášať túto informáciu, až kým sa nevráti k prvej značke @. Tu prejde do príslušného zo stavov q_{p1}, q_{p0}, $q_{p\#}$ a v tomto stave porovná prenesenú informáciu s tým čo práve prečíta. Potom sa buď pomocou stavu q_d vráti späť k druhému číslu a pokračuje v porovnávaní, alebo ak bol v stave $q_{p\#}$, čo znamená že dané číslo skončilo, tak prejde skoro úplne na začiatok do stavu qz, ktorým odštartuje hladanie a porovnávanie ďalších dvoch čísiel.
V stavoch q_{c1}, q_{c0}, q_{p1}, q_{p0} kontroluje, či sú čísla (číslica po číslici) rovnaké. V stavoch $q_{c\#}$, $q_{p\#}$ zase kontroluje či majú rovnakú dĺžku.
Tým som ukázal, že všetky akceptované slová musia byť kódmi grafu a musia obsahovať nejakú skupinu hrán, ktoré dokopy obsahujú každý vrchol práve 2 krát, čo znamená že graf má cyklus a teda $L(M) \subseteq L$.
Tiež je zrejmé, že každé slovo z L prejde prvou časťou, pretože je kódom grafu. Pritom obsahuje cyklus, takže je možné vybrať určité hrany a porovnaním správnych dvojic vrcholov týchto hrán potvrdiť, že každý vrchol je tam práve 2 krát. A presne toto urobí druhá a tretia časť. Takže musí akceptovať každé slovo z L. $L \subseteq L(M)$.

Graf

znázorňujúci prechody medzi stavmi